

# ALGEBRE (COURS 9 EME ANNEE)

## I- Racine carrée d'un réel positif :

### 1- Carré d'un nombre :

Le carré d'un nombre  $a$  est le nombre multiplié par lui-même  $a \times a$ . On le note  $a^2$ . On a :

$$a \times a = a^2$$

**NB :** Le carré d'un nombre est toujours positif.

**Consigne :** Calcule les carrés des nombres :

0 ; 1 ; 2 ; -2 ; 3 ; -3 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,41 et 1,42.

- **Que signifie  $\sqrt{a}$  ( $a$  positif) ?**

Tu sais que  $3^2 = 9$  alors  $\sqrt{9} = 3$  ; on lit " racine carré de 9 égal à 3" Le symbole  $\sqrt{\quad}$  est appelé radical. On dit que 9 est sous le radical.

**Consigne :**

1) Complète :

$$3^2=9 \quad \text{alors} \quad \sqrt{9} = 3$$

$$0^2= \quad \text{alors} \quad \sqrt{\quad} = \quad$$

$$1^2= \quad \text{alors} \quad \sqrt{\quad} = \quad$$

$$2^2= \quad \text{alors} \quad \sqrt{\quad} = \quad$$

$$4^2 = \dots \text{ alors } \sqrt{\quad} = \quad$$

$$5^2 = \dots \text{ alors } \sqrt{\quad} = \quad$$

2) Trouve :  $\sqrt{36} = \dots$  ;  $\sqrt{49} = \dots$  ;  $\sqrt{64} = \dots$  ;  $\sqrt{81} = \dots$  ;  $\sqrt{100} = \dots$  ;

$$\sqrt{121} = \dots ; \sqrt{144} = \dots ; \sqrt{169} = \dots ; \sqrt{0,25} = \dots ; \sqrt{1,21} = \dots$$

**Définition :**

Pour tout nombre  $a$  positif,  $\sqrt{a}$  est le nombre positif dont le carré est  $a$ . Autrement dit  $\sqrt{a^2} = a$  et

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$\sqrt{a}$  n'existe jamais si  $a$  est négatif

**Exemple:**  $\sqrt{-36}$  n'existe pas

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

**Exemple:**  $\begin{cases} \sqrt{7^2} = |7| = 7 \\ \sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7 \end{cases}$

## II- Nombres irrationnels :

Observe la suite des carrés suivants :

$$0^2 = 0 ; 1^2 = 1 ; 2^2 = 4 ; 3^2 = 9 ; 4^2 = 16 ; 5^2 = 25.$$

Les nombres 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10 par exemple ne figure pas parmi les carrés. Et pourtant il existe un nombre qui multiplié par lui-même donne 2. Ce nombre est  $\sqrt{2}$ .

On a :

$$(1,4)^2 = 1,96 \text{ et } (1,5)^2 = 2,25 \text{ donc } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5.$$

$$(1,41)^2 = 1,9881 \text{ et } (1,42)^2 = 2,0164 \text{ donc } 1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

Le nombre  $\sqrt{2}$  existe mais sa valeur exacte n'est pas connue dans  $\mathbb{Q}$ . Donc

$\sqrt{2}$  n'est pas un nombre rationnel. Il est un nombre **irrationnel**.

De même  $2\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $5\sqrt{3}$ ;  $\pi$ ;  $7\pi$ ;  $\sqrt{13}$ ;  $-3\sqrt{13}$ ;  $5\sqrt{13}$  sont des nombres irrationnels.

### III- Ensemble des nombres réels :

**1- Définition :** Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment un grand

ensemble appelé ensemble des nombres réels et noté  $\mathbb{R}$ .

**Retiens que :**  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

#### 2- Les Formules :

Calcule :

---

$$\sqrt{9} \times 4 = \dots$$

---

$$\sqrt{4} \times 25 = \dots$$

---

$$\sqrt{81} \times 100 = \dots$$

—

$$-\sqrt{9} \times \sqrt{4} = \dots$$

$$-\sqrt{4} \times \sqrt{25} = \dots$$

$$\sqrt{81} \times \sqrt{100} = \dots$$

Calcule :

$$\sqrt{\frac{9}{4}} = \dots$$

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \dots$$

$$\sqrt{\frac{36}{4}} = \dots$$

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{4}} = \dots$$

### 3- Propriétés :

Pour tous nombres réels positifs a et b

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad \text{et} \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

a) Ecris sous la forme  $a\sqrt{b}$

$$\sqrt{8}; \sqrt{12}; \sqrt{18}; \sqrt{20}; \sqrt{45}; \sqrt{50};$$

b) Simplifie :

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}; \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}; \frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$$

### 4- Résolution de l'équation $x^2 = \alpha$

a. Si  $\alpha$  est positif, deux solutions :

$$\sqrt{\alpha} \text{ et } -\sqrt{\alpha} \quad S = \{-\sqrt{\alpha}; \sqrt{\alpha}\}$$

b. Si  $\alpha = 0$ , une seule solution : 0 s

$$= \{0\}$$

**C)** Si  $\alpha$  est négatif, pas de

solution  $s = \emptyset$

**Consigne :** Résous les équations suivantes dans  $\mathbb{Z}$  puis  $\mathbb{R}$  :  $x^2 = 9$  ;  $x^2 = 7$  ;  $2x^2 = 32$  ;  $x^2 = -4$ .

## EXERCICES :

1) Décompose en produit de facteurs premiers le nombre  $A = 11025$  puis en déduire que la racine carré de ce nombre est un entier.

2) Calcule :

$$\sqrt{49} + \sqrt{16} - \sqrt{9} ; \sqrt{81} - \sqrt{121} + \sqrt{64} ; 2\sqrt{25} - \sqrt{81} ;$$

$$\sqrt{1,21} + \sqrt{0,49} - \sqrt{0,64} ; \sqrt{3} + \sqrt{3} ; 2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} ;$$

$$2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - 7\sqrt{3} ; 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 7\sqrt{3} + 9\sqrt{2}$$

3) Ecris sous la forme  $a\sqrt{b}$  :

$$\sqrt{12} ; \sqrt{18} ; \sqrt{20} ; \sqrt{27} ; \sqrt{45} ; \sqrt{48} ; \sqrt{50} ;$$

$$\sqrt{80} ; \sqrt{96} ; \sqrt{125} ; \sqrt{180} ; \sqrt{675} ; \sqrt{363}$$

4) Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$x^2 = 25 ; x^2 - 64 = 0 ; 3x^2 = 48 ; x^2 = -25 ;$$

$$2x^2 - 98 = 0 ; x^2 - \frac{4}{9} = 0 \quad 25x^2 + 125 = 0.$$

5) Démontre que :  $1382976 = 2^6 \times 3^2 \times 7^4$  et en déduis :

- La valeur exacte de  $\sqrt{1382976}$
- La valeur exacte de  $\sqrt[4]{1382976}$

IV- Calcul dans  $\mathbb{R}$  :

1- Rappels :

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Pour  $a \geq 0$  et  $b > 0$

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Consigne 1: Simplifie

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2}; \quad \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}; \quad \sqrt{75} \times \sqrt{3}; \quad 2\sqrt{5} \times (-\sqrt{45});$$

$$2\sqrt{5} \times 3\sqrt{3}; \quad \frac{\sqrt{63}}{2\sqrt{45}}; \quad \sqrt{\frac{5}{14}} \times \sqrt{\frac{10}{7}}$$

Consigne 2 : Calcule

$$a = 3\sqrt{5} - 7\sqrt{5} + 12\sqrt{5}; \quad b = 8\sqrt{7} - \sqrt{3} + \sqrt{7} - 5\sqrt{3};$$

$$c = \sqrt{18} - \sqrt{8} - \sqrt{2}; \quad d = 5\sqrt{80} - \sqrt{180} + \sqrt{20}; \quad e = 2\sqrt{3} -$$

$$5\sqrt{300} + 4\sqrt{12}$$

— — —

## 2- Développement :

$$a. \quad a(b + c) = ab + ac$$

$$\bullet \quad a(b - c) = ab - ac$$

$$b. \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

**Consigne :** Développe et réduis les produits

$$\begin{aligned} &\sqrt{3}(5 + 2\sqrt{2}); \quad \sqrt{2}(0,3 - \sqrt{2}); \quad 2\sqrt{5} + 1 - (3\sqrt{5} + 1); \quad (5 + \\ &2\sqrt{5})(3 - \sqrt{2}); \quad (\sqrt{3} + 2)(\sqrt{5} - 1) \end{aligned}$$

## 3- Quotient de deux réels (RENDRE RATIONNEL)

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b};$$

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \times \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \times \sqrt{c}} = \frac{a\sqrt{c}}{bc}$$

On dit que nous avons écrit sans radical le dénominateur (ou rendu rationnel le dénominateur)

**Consigne :** Ecris sans radical le dénominateur (ou rends rationnel le

dénominateur) :  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ;  $\frac{7}{\sqrt{6}}$ ;  $\frac{2}{3\sqrt{5}}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

**Consigne :** Calcule et simplifie :  $\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}$ ;  $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5\sqrt{6}}{25} - \frac{5\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{2}$

**4- Extraction de la racine carrée :**

**Exemple :**

9 73 44	312
-9	$3^2 = 9$
0 73	$61 \times 1 = 61$
-61	$622 \times 2 = 1244$
12 44	
-1244	
0000	$\sqrt{97344} = 312$

**Consigne :** Détermine de même  $\sqrt{625}$  et  $\sqrt{3}$

**5- Comparaison de deux nombres irrationnels :**

**a- En comparant leurs carrés :**

Si x et y sont positifs et si  $x^2 < y^2$  alors  $x < y$  Si x et y sont négatifs et si  $x^2 < y^2$  alors  $x > y$

**Consigne :** Les deux nombres sont positifs Compare

$2\sqrt{3}$  et  $3\sqrt{2}$ ; —  $5\sqrt{2}$  et  $2\sqrt{7}$  —

$$(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12; \quad (3\sqrt{2})^2 = 9 \times 2 = 18$$

$$(2\sqrt{3})^2 < (3\sqrt{2})^2 \text{ alors } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2} \quad \text{—} \quad \text{—}$$

$$(5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50; \quad (2\sqrt{7})^2 = 4 \times 7 = 28$$

$$(5\sqrt{2})^2 > (2\sqrt{7})^2 \text{ alors } 5\sqrt{2} > 2\sqrt{7} \quad \text{—} \quad \text{—}$$

**Consigne :** Les deux nombres sont négatifs Compare :

$$-2\sqrt{3} \text{ et } -3\sqrt{2}; -5\sqrt{2} \text{ et } -2\sqrt{7}$$

$$(-2\sqrt{3})^2 < (-3\sqrt{2})^2 \text{ alors } (-2\sqrt{3}) > (-3\sqrt{2})$$

$$(-5\sqrt{2})^2 > (-2\sqrt{7})^2 \text{ alors } (-5\sqrt{2}) < (-2\sqrt{7})$$

**b- En comparant leurs valeurs approchées :**

**Consigne :** On donne  $\sqrt{2} = 1,414$ ;  $\sqrt{3} \approx 1,732$ ;  $\sqrt{7} = 2,645$  Compare  $2\sqrt{3}$  et  $3\sqrt{2}$ ;  $-5\sqrt{2}$  et  $-2\sqrt{7}$

$$2\sqrt{3} = 2 \times 1,732 = \underline{\quad\quad} \text{ et } 3\sqrt{2} = 3 \times 1,414 = \underline{\quad\quad} \text{ alors } 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$$

$$-5\sqrt{2} = -5 \times 1,414 = \underline{\quad\quad} \text{ et } -2\sqrt{7} = -2 \times 2,645 = \underline{\quad\quad}$$

$$\text{alors } (-5\sqrt{2}) < (-2\sqrt{7})$$

**V- Factorisation :**

**Consigne :** Le facteur commun est apparent

Factorise :  $A = 3x^2 - 2x$  et  $B = (x + 2)(4x - 5) + (x + 2)(5x + 1)$  Rép :  $A = x(x - 2)$  et  $B = (x + 2)(9x - 4)$

**Consigne :** Le facteur commun est caché Factorise :  $A = 3x$

$$+ 6 ; B = 6x^2 - 15x ;$$

$$C = (2x + 3)(4x - 3) - (4x + 6)(3x + 8) ;$$

$$D = (2x + 3)(x - 1) + (1 - x)$$

Rép :  $A = 3(x + 2)$  ;  $B = 3x(2x - 5)$  ;  $D = (x - 1)(2x + 2) = 2(x - 1)(x + 1)$   $C = (2x + 3)(-2x - 19) = -(2x + 3)(2x + 19)$

**EXERCICES :**

1) Simplifie(ou calcule, ou écris sous la forme  $a\sqrt{b}$ )

$$A = \sqrt{44} - 5\sqrt{11} + \sqrt{99}; B = \sqrt{18} - 2\sqrt{50} + \sqrt{32}; C = 8\sqrt{48} - 7\sqrt{27}; D =$$

$$\sqrt{80} - 10\sqrt{20} + 2\sqrt{45};$$

$$E = 2\sqrt{13} - 4\sqrt{117} + 9\sqrt{52}; F = \sqrt{80} - \sqrt{605} + 3\sqrt{245}; G = 2\sqrt{48} - 5\sqrt{63} + \sqrt{700};$$

$$H = 5\sqrt{28} - \sqrt{63} + 2\sqrt{175}; I = \sqrt{54} - 5\sqrt{96} + 3\sqrt{150}$$

2) Effectue les calculs suivants sous la forme  $a + b\sqrt{n}$  ou a et b sont des

entiers relatifs et n un entier naturel :

$$J = 2\sqrt{45} + \sqrt{225} - \sqrt{20} + \sqrt{125}; K = \sqrt{625} - \sqrt{28} + \sqrt{112} - 18; L = \sqrt{363} + 5\sqrt{3} + \sqrt{2} \times \sqrt{18} -$$

$$3\sqrt{12}$$

3) Calcule :

$$\sqrt{75} \times \sqrt{80}; \quad 3\sqrt{45} \times 2\sqrt{5}; \quad 4\sqrt{27} \times 2\sqrt{12}; \quad 5\sqrt{72}$$

$$\times 3\sqrt{50}; \quad \sqrt{72} + \sqrt{128}$$

4) Ecris sans radical au dénominateur ou rends rationnel :

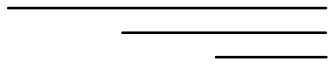
$$\frac{2}{\sqrt{7}}; \quad \frac{5}{\sqrt{13}}; \quad \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}; \quad \frac{\sqrt{5+3}}{\sqrt{3}}; \quad \frac{3}{2\sqrt{3}}; \quad \frac{\sqrt{3-2}}{\sqrt{5}}$$

5) Simplifie :

$$A = \sqrt{12} - \sqrt{12} - \sqrt{12} - \sqrt{9}$$

$$; B = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}^2$$

$$C = \sqrt{5} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2^2}; D = \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{9};$$



$$E = \sqrt{13} + \sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{1}$$

$$6) \text{ Trouve } x \text{ pour que } \sqrt{x} + \sqrt{13} + \sqrt{7} + \sqrt{3} + \sqrt{1} = 5$$

7) Range dans l'ordre décroissant les nombres réels suivants en comparant leurs carrés :  $2\sqrt{5}$  ;  $5\sqrt{2}$  ;  $3\sqrt{3}$  ;  $2\sqrt{6}$  ;  $5$

8) Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $x\sqrt{3} - \sqrt{27} = 0$  et montre que la solution trouvée est un entier naturel.

9) Développe et réduis

$$a = (5x - 4)(x + 3) ; b = (x + 7)(4 - 5x) ; c = -2(2x + 5)(x - 3)$$

$$d = 3x(x - 4)(7x - 1) ; e = (x + 5)(x - 3) + (2 - x)(3x - 2) ; f = (3x + 2)(3x + 1) - (3x - 1)(3x + 1)$$

$$g = (2x + 3)(3x - 2) - (x + 1) - (x + 1)(x - 1) + 3(x - 2)(2 - x)$$

10) Factorise

$$A = 21 - 7x ; \quad B = 48 + 8a ; \quad C = 35x - 7a + 42 \quad D = (x + 2)(x - 3) + (x + 2)(2x - 1) ;$$

$$E = (2y - 3)(4x - 1) + 2x(2y - 3) ;$$

$$F = 5(x - 2)(x + 3) + 4(2 - x)(x + 1) ; \quad G = 4x - 12 - 7(x - 3)$$

## VI- Puissances d'un nombre réel :

### 1- Définition :

Soit  $a$  un réel non nul et  $n$  un entier naturel :

$a \times a \times \dots \times a$  ( $n$  facteurs) =  $a^n$  se lit "a puissance n".

Dans  $a^n$ ,  $\left\{ \begin{array}{l} n \text{ est l'exposant} \\ a \text{ est la base} \end{array} \right.$

L'exposant indique le nombre de facteurs.

### Remarque :

$a \times a = a^2$  se lit "a puissance 2" ou "a au carré"

$a \times a \times a = a^3$  se lit "a puissance 3" ou "a au cube". Pour tout réel non

nul  $a$  :

$$a^0 = 1 \text{ et } a^1 = a; \quad a^n \neq a \times n; \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad \text{Exemple : } \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$$

**Consigne :** Ecris sous forme d'une puissance  $2 \times 2 \times 2 = \dots$

. ;  $(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = \dots$ .

$\pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi \cdot \pi = \dots$  ;  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \dots$  ;  $\sqrt[4]{49} = \dots$  ;

$1000 = \dots$  ;  $3\sqrt{3} = \dots$

**Consigne :** Calcule puis complète avec = ou  $\neq$

$15^2 = \dots$  et  $15 \times 2 = \dots$  alors  $15^2 \dots 15 \times 2$  ;

$(-3)^4 = \dots$  et  $(-3) \times 4 = \dots$  alors  $(-3)^4 \dots (-3) \times 4$ .

## 2- Signe de $a^n$ :

**Consigne :** Calcule :  $(-1)^1 = \dots$  ;  $(-1)^2 = \dots$  ;  $(-1)^3 = \dots$  ;  $(-1)^4 = \dots$  ;  $(-1)^5 = \dots$  ;  $(-1)^6 = \dots$  ;  $(-1)^7 = \dots$  ;  $(-1)^8 = \dots$

Tous les nombres négatifs se comportent de cette manière. **Signe de**

$a^n$  : Si  $a$  est un réel négatif :

- a.  $a^n$  est positif lorsque  $n$  est pair
- b.  $a^n$  est négatif si  $n$  est impair.

### 3- Propriété des puissances :

#### a- Produit de puissances d'un même nombre :

$$a^n \cdot a^p = a^{n+p} \text{ avec } a \neq 0, n \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{Z}$$

**Exemple :**  $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$

a. Puissance d'une puissance

$$(a^n)^p = a^{n \cdot p} \text{ Exemple: } (2^3)^4 = 2^{12}$$

b. Quotient de deux puissances d'un même nombre

$$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad \text{Exemple: } \frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1}$$

c. Puissance d'un produit :  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

**Exemple :**  $(3x)^2 = 3^2 \cdot x^2 = 9x^2$  ;  $(2\sqrt{3})^2 = 4 \times 3 = 12$

d. Puissance d'un quotient  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$  Exemple :  $\frac{3^2}{5^2} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

e.  $(\sqrt[n]{a})^3 = \sqrt[n]{a^3}$  **D'une manière générale :** Pour tout réel a positif

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ lorsque } n \text{ est pair}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \sqrt[n-1]{a} \text{ lorsque } n \text{ est impair}$$

**Exemple :**

$$\sqrt{2^6} = 2^3 = 2^3 \text{ car } 6 \text{ est pair}$$

$$\sqrt{2^7} = 2^3 \sqrt{2} = 2^3 \sqrt{2} \text{ car } 7 \text{ est impair}$$

f.  $a^n = a^p$  lorsque  $n = p$  et  $a^n = b^n$  lorsque  $a = b$  Exemple :  $5^a = 5^2$   
alors  $a = 2$

**Consigne :** Ecris sous la forme d'une seule puissance d'un nombre réel

$$(-7)^4; \quad (-7)^6; \quad (\sqrt{3})^5 \times (\sqrt{3})^3 \div (\sqrt{3}); \quad \left(\frac{-1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{-3}{3}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$(x^3)^7; \quad \left[\left(\frac{-7}{9}\right)^5\right]^7; \quad [(\sqrt{2})^{-3}]^2 \cdot [(\sqrt{2})^{-4}]^3$$

**Consigne :** Remplace les points par les nombres qui conviennent

$$\frac{x^9 \cdot y^{12}}{27m^6} = \left[ \frac{x \cdots y \cdots 3}{\dots m \cdots} \right]$$

**Consigne :**

Trouve x dans les cas suivants :  $2^x \cdot 2^3 = 2^7$ ;  $(a^3)^x = a^{12}$

—

**Consigne :** Calcule  $A = 2x^2 - 3x + 2$  pour  $x = 3$  puis pour  $x = \sqrt{2}$ .

## EXERCICES :

1) Effectue

$$(-2)^3 ; -2^3 ; (\sqrt{2})^{-3} ; (-10)^5 ; (-1)^{13} ; (-1)^{26} ; (+1)^{15}$$

2) Indique si les nombres suivants appartiennent à  $\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}^-$

$$(-2)^5 ; (-5)^{13} ; (-0,04)^{26} ; (+1)^{14} ; (-5185)^{5012} ; (-64)^{1793} ; (-1)^{26}$$

3) Ecris sous la forme d'une seule puissance d'un nombre réel

$$(-3)^4 \times (-3)^7 ; 4^{11} \times 4^{13} ; [(\sqrt{5})^{-4}]^5 ; (7^3)^2 ; (-2)^2 \times [(-2)^3]^2 ; 8^7 \times 5^7 ;$$

$$[(-3) \times 4]^2 ; (-5) \times [(-5)^3]^2$$

4) Trouve le naturel x tel que

a)  $3^2 \times 3^x = 3^7 ; \quad (-5)^3 \times (-5)^4 \times (-5)^x = (-5)^{13}$

b)  $[(-7)^x]^2 = (-7)^{10} ; (-4)^4 \times [(-4)^3]^x = (-4)^{13}$

c)  $\frac{7^x}{7^7} = 7^2 ; \frac{3^x}{3^4} = 1 ; 2^x \times 2^{-5} = 1$

$$x^3 = 5^3 ; (x^2)^4 = (3^4)^2$$

c) Soient a et b deux réels non nuls, on donne

$$A = ab^2 \times \left(\frac{1}{b}\right)^4 \quad \text{et} \quad B = a^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 \times \frac{1}{b^2}$$

a. Donne une écriture simplifiée de A et de B.

b. Calcule la valeur numérique de  $A \times B$  et de  $\frac{A}{B}$  pour

$$a = 4 \cdot 10^{-3} \quad \text{et} \quad b = 2 \cdot 10^{-2}$$

d) Complète le tableau numérique ci- dessous :

x	-0,3	0,025	0,25	0,275	0,3	1,6	2	0,35
$x^2$	0,09					2,56		
$x^3$				0,020796875			8	0,042875

On donne :  $A = x^2 + 0,5x - 0,075$  et  $P = x^3 - 1,55x^2 + 0,155x + 0,12$ .

Calcule A et P pour :  $x = 0,025$  ;  $x = -0,3$  ;  $x = 1,6$  ;  $x = 0,25$  ;  $x = 0,3$

## VII- Identités remarquables et développement :

Pour tous nombres réels a et b, on développe :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2$$

$$- 2ab + b^2 \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

**Consigne :** Développe et réduis

$$(3x + 2)^2 = \dots ; \left( \frac{1}{3}x + 4 \right)^2 = \dots$$

$$(\sqrt{3} + 5)^2 = \dots ; (a\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = \dots$$

**Consigne :** Développe et réduis

$$(2x - 3)^2 = \dots ; \left( \frac{3}{2}x - \frac{5}{7} \right)^2 = \dots$$

$$(1 - \sqrt{2})^2 = \dots; (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \dots$$

**Consigne :** Développe et réduis

$$(4x + 5)(4x - 5) = \dots; (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \dots;$$

$$(\sqrt{2} - x)(\sqrt{2} + x) = \dots; \left(\frac{1}{3}x + 2\right)\left(\frac{1}{3}x - 2\right) = \dots$$

### VIII- Identités remarquables et factorisation :

Pour tous nombres réels a et b, on factorise :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

**Activité 2**

**Consigne :** Factorise les expressions suivantes  $25x^2 + 30x + 9 = \dots$ ;  $x^2 + 2x + 1 = \dots$ ;  $x^2 -$

$$8x + 16 = \dots; 2 - x^2 = \dots$$

$$9x^2 - 24x + 16 = \dots; 16x^2 - 25 = \dots; x^2 - \frac{1}{9} = \dots; (x - 1)^2 - 4 = \dots$$

**Consigne :** Ecris sous forme de produit de facteurs les expressions suivantes :

$$A = (2x - 5)^2 - (3x - 5)(2x + 1) \quad B = x^2 +$$

$$- 9 + (2x + 5)(x + 3) \quad C = (2x - 3)^2 - (x +$$

$$2)^2$$

**IX- Rendre rationnel le dénominateur d'un quotient :**

$a + b$  et  $a - b$  sont deux **expressions conjuguées** l'une de l'autre. Leur produit,  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$  est en général un rationnel.

Pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

**Exemple :** Dans  $\frac{5}{\sqrt{3}-1}$

$\sqrt{3} - 1$  est le dénominateur, son expression conjuguée est  $\sqrt{3} + 1$  donc :

$$\frac{5}{\sqrt{3}-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$$

**Consigne :** Rends rationnel le dénominateur :

$$\frac{3}{\sqrt{5}-2} ; \frac{3\sqrt{2}}{3+\sqrt{3}}$$

**Consigne :** Effectue

$$A = \frac{1}{\sqrt{5} - 1} + \frac{3}{\sqrt{5} + 1}$$

## EXERCICES :

1) Développe et réduis

$$a = (7x + 3)^2; \quad b = \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\right)^2; \quad c = (\sqrt{5} + 4)^2; \quad d = (5x - 3)^2;$$

$$e = \left(\frac{7}{2} - \frac{2}{3}x\right)^2; \quad g = (7x - 4)(7x + 4);$$

$$h = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{3}x\right)\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}x\right); \quad i = (2\sqrt{3} + 7)(2\sqrt{3} - 7);$$

$$j = (x + 3)^2 - (x - 4)(x + 4) + (4x - 3)^2;$$

2) Factorise

$$A = 64x^2 + 112x + 49; \quad B = 36x^2 + 25 + 60x \quad C = x^2 - 10x + 25; \quad D = 9x^2 + 64 - 48x$$

$$E = 49x^2 - 4; \quad 12x^2 - 75; \quad G = \frac{49}{25} - \frac{81}{64}x^2$$

$$H = (5x + 3)^2 - (2x - 5)^2; \quad I = \left(\frac{3}{2}x - \frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\right)^2$$

3) Ecris sans radical au dénominateur

$$\frac{1}{3 + \sqrt{2}}; \quad \frac{2}{5 + 2\sqrt{3}}; \quad \frac{2 + 3\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}; \quad \frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}; \quad \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

4) On donne  $A = 5 + 2\sqrt{3}$  et  $B = 5 - 2\sqrt{3}$

a) Calcule  $A^2$ ,  $B^2$  et  $A \times B$

b) Ecris  $\frac{A}{B}$  sans radical au dénominateur

5) a) Ecris le réel  $\frac{-2+2\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}$  sans radical au dénominateur et sous une forme aussi simple que possible.

b) Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt{3}(x-1) + 3\sqrt{3} = 2(x-1) + 4\sqrt{3}$

6) Soit  $C = \frac{5 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{27} - \sqrt{12}}$ . Calcule  $C$ .

## X- Les Suites de nombres proportionnels :

**Consigne :** Au marché, on a relevé les prix suivants de sucre chez quatre boutiquiers :

	Chez le 1 <sup>er</sup>	Chez le 2 <sup>ème</sup>	Chez le 3 <sup>ème</sup>	Chez le 4 <sup>ème</sup>
Prix en F CFA	3000	1200	4200	6000
Masse en kg	5	2	7	10

Ces boutiquiers ont – ils vendus le kilogramme de sucre au même prix ? **Exemple de réponse**

$$\frac{3000}{5} = 600; \quad \frac{1200}{2} = 600; \quad \frac{4200}{7} = 600; \quad \frac{6000}{10} = 600$$

Ces boutiquiers ont vendu le kilogramme de sucre au même prix car les quotients calculés sont tous égaux à 600.

On dit que les deux suites de nombres

3000 ; 1200 ; 4200 ; 6000 et 5 ; 2 ; 7 ; 10 sont proportionnelles On

écrit :

$$\frac{3000}{5} = \frac{1200}{2} = \frac{4200}{7} = \frac{6000}{10} = 600$$

Le nombre 600 est le coefficient (ou rapport) de proportionnalité.

Le tableau suivant appelé tableau de proportionnalité permet de retrouver les termes cachés ou effacés d'une des deux suites.

: 600	3000	1200	4200	6000	X 600
	5	2	7	10	

**Exemple :** Considérons le même tableau de proportionnalité avec des effacés.

Retrouvons ces termes effacés. Soit x et y ces deux termes.

: 600	↓	{	3000	x	4200	6000	}	↑	x 600
			5	2	y	10			

$x = 2 \times 600 = 1200$                        $y = 4200 \div 600 = 7$

**Consigne :** Les suites : 30 10 70 et 6 2 14 sont-elles des suites de nombres proportionnels ? Pourquoi ?

**Consigne :** Complète de manière à obtenir deux suites de nombres proportionnels après calcul du coefficient

a)  $\frac{800}{2} = \frac{2000}{x} = \frac{y}{7} = \frac{4000}{t}$

b)

30	10	
	2	14

**1- Définitions :**

- Deux suites de nombres non nuls :

$a, b, c, \dots$  et  $a', b', c', \dots$  sont proportionnels lorsque les quotients

$\frac{a}{a'}, \frac{b}{b'}, \frac{c}{c'}, \dots$  sont tous égaux on note  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots = k$

(k est le coefficient ou rapport de proportionnalité).

- On dit que quatre nombres, (a, b, c, d) pris dans cet ordre forment une

proportion lorsque  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

a et d sont les extrêmes ; b et c sont les moyens.

**2- Propriété fondamentale :**

Dans une proportion, le produit des moyens est égal au produit des extrêmes.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  alors  $bc = ad$

**Consigne :**

Reconnais les proportions dans les exemples suivants :

$$(3; 4; 6; 8) ; (2; 7; 3; 6) ; \sqrt{3} = \frac{\quad}{a} \quad \frac{\underline{3}}{a\sqrt{3}}$$

**Consigne :**

Sachant que  $(-5,1 ; 2,7 ; 17 ; x)$  forment une proportion, calcule  $x$ .

**Consigne :**

Sachant que  $(9\pi ; x ; x ; \pi)$  est une proportion, calcule x.

**3- Propriétés :**

- Dans une proportion, on peut :

**a.** Permuter les extrêmes :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  équivaut à  $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

**b.** Permuter les moyens :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  équivaut à  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

**c.** Permuter à la fois les moyens et les extrêmes :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

**Consigne :** Détermine deux nombres a et b sachant que

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \text{ et } a + b = 10$$

- On démontre que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+3b-5c}{a'+3b'-5c'}$$

**4- Démonstration :**

Démontrons par exemple que :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \text{ et } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a+3b-5c}{a'+3b'-5c'}$$

Posons  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ , on a :  $\frac{a}{b} = k$  alors  $a = kb$  et  $\frac{c}{d} = k$

$$= k \text{ alors } c = kd$$

$$a + c = kb + kd = k(b + d) \text{ ainsi } k = \frac{a + c}{b + d}$$

$$D'où \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d} \text{ de même on démontre que } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a - c}{b - d}$$

$$\text{Démontrons par exemple que } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a + 3b - 5c}{a' + 3b' - 5c'}$$

$$\text{Posons } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k, \text{ on a:}$$

$$\frac{a}{a'} = k \text{ alors } a = ka' \quad \frac{b}{b'} = k \text{ alors } b = kb' \text{ et } \quad \frac{c}{c'} = k \text{ alors } c = kc'$$

$$a + 3b - 5c = ka' + 3kb' - 5kc' = (a' + 3b' - 5c') \text{ ainsi}$$

$$k = \frac{a + 3b - 5c}{a' + 3b' - 5c'} \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{a + 3b - 5c}{a' + 3b' - 5c'}$$

**Consigne :** Trouve trois nombres a, b, c proportionnels à 5, 3, 7 sachant que  $2a - b + c = 28$ .

### XI- Les Grandeurs inversement proportionnelles :

Les grandeurs a, b, c, ... sont inversement proportionnelles aux grandeurs a', b', c', ... lorsque :

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} = \dots \text{ ou } \mathbf{aa' = bb' = cc' = \dots}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

**Consigne :** Trouve trois nombres x, y, z inversement proportionnels à 3, 2, 5 sachant que  $x + y - z = 57$

## EXERCICES :

1) Calcule les réels a et b sachant que (a, b, 3, 5) forment une proportion et  $a + b = 72$

2) Calcule x et y tel que :  $\frac{x}{y} = 5$  et  $x + y = 4,2$

3) Voici deux suites de nombres proportionnels, trouve x, y, z et t.

65	260	39	z	117
x	300	y	105	t

4) Trouve x, y, z et t sachant que

$$\frac{46}{x} = \frac{230}{z} = \frac{414}{108} = \frac{y}{6} = \frac{t}{72}$$

5) Trouve les nombres x vérifiant :  $\frac{2x}{45} = \frac{280}{7x}$

6) Partage 66080F entre trois personnes proportionnellement à 4 ; 5 et 7.

7) Le directeur de l'école décide de partager une somme entre les quatre meilleurs élèves proportionnellement à 13, 10, 7 et 4.

a) Trouve la part de chaque élève sachant que le premier doit recevoir 58500F.

b) Calcule la somme à partager.

8) Le périmètre d'un terrain triangulaire est de 150 m.

Les mesures des côtés sont proportionnelles aux nombres 4 ; 5 et 6. Calcule les dimensions de ce terrain.

9) Partage 48000 en parties proportionnelles à 5 ; 11 et 14.

**10)** Trouve trois nombres  $x$ ,  $y$  et  $z$  proportionnels à 2 ; 3 et 5 sachant

que  $3x + 2y + z = 1870$ .

**11)** A la suite des résultats du DEF, le Ministère de l'Education Nationale a décidé de donner des prix aux trois meilleurs élèves du Mali. Le premier reçoit une somme de 400000F ; le deuxième une somme de 300000F et le troisième une somme de 200000F.

Pour les motiver encore plus, on leur donne la somme de 180000F tout en leur exigeant de faire le partage proportionnellement à leur premier gain.

**Quelle est la part qui reviendra à chacun d'eux ?**

**12)** Quatre rectangles ont les dimensions consignées dans le tableau suivant :

Longueur (cm)	3,6	14,4	7,2	4,8
Largeur (cm)	2,4	0,6	1,2	1,8

**a)** Montre que les longueurs sont inversement proportionnelles aux largeurs.

**b)** Compare les surfaces de ces rectangles.

## XII- Encadrement d'un nombre réel :

**Consigne :** Effectue  $\frac{8}{7}$  à 0,001 près puis complète avec l'un des signes d'inégalité < ou >.

$$1,14 \dots \frac{8}{7} \dot{-} \frac{8}{7} \dots 1,15$$

**Exemple :**

$$\frac{8}{7} = 1,142 \quad \text{on a :} \quad 1,14 < \frac{8}{7} \dot{-} \frac{8}{7} < 1,15$$

**Conclusion :** On peut donc écrire la double inégalité suivante :

$$1,14 \leq \frac{8}{7} \dot{-} \frac{8}{7} < 1,15 \text{ ou } 114 \cdot 10^{-2} \leq \frac{8}{7} < 11510^{-2}$$

On dit que nous avons réalisé un encadrement d'ordre 2 de  $\frac{8}{7}$  car

$$1,15 - 1,14 = 0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

⬇ L'amplitude de cet encadrement est : 0,01 ou  $\frac{1}{100}$  ou  $10^{-2}$

⬇ 1,14 une valeur approchée de  $\frac{8}{7}$  à  $10^{-2}$  près par **défaut**.

⬇ 1,15 est une valeur approchée de  $\frac{8}{7}$  à  $10^{-2}$  par **excès**.

**Règle :** Pour encadrer un réel négatif, on encadre d'abord sa valeur absolue puis on multiplie cette double inégalité par (-1).

**Consigne :**

Trouve l'encadrement d'ordre 2 puis d'ordre 3 de  $\pi = 3,14159$

Rép : D'ordre 2 :  $3,14 \leq \pi < 3,15$  ; D'ordre 3 :  $3,141 \leq \pi < 3,142$

**Consigne :**

Trouvons l'encadrement d'ordre 1 puis d'ordre 2 du nombre négatif  $-\frac{3}{7}$

$\frac{3}{7}$

**Exemple :**

$$\frac{3}{7} = 0,4285$$

Encadrement d'ordre 1 de  $-\frac{3}{7}$

$$0,4 \leq \frac{3}{7} < 0,5 \text{ on en déduit } -0,5 \leq -\frac{3}{7} < -0,4$$

Encadrement d'ordre 2 de  $-\frac{3}{7}$

$$0,42 \leq \frac{3}{7} < 0,43 \text{ on en déduit } -0,43 \leq -\frac{3}{7} < -0,42$$

**1- Encadrement d'une somme :**

**Règle :** Pour trouver un encadrement de a et b, on ajoute membre à membre les encadrements de a et b.

$$\begin{array}{r} x \leq a < y \\ x' \leq b < y' \\ \hline x + x' \leq a + b < y + y' \end{array}$$

**Consigne :** On donne les encadrements :

$$3,1415 \leq \pi < 3,141 \text{ et } 1,7320 \leq \sqrt{3} < 1,7321$$

Trouve un encadrement de  $\pi + \sqrt{3}$  **Rép**

$$:4,8735 \leq \pi + \sqrt{3} < 4,8737$$

On en déduit les encadrements

Ordre 0 :  $4 \leq \pi + \sqrt{3} < 5$  Ordre 2 :

$$4,87 \leq \pi + \sqrt{3} < 4,88$$

$$\text{Ordre 3 : } 4,873 \leq \pi + \sqrt{3} < 4,874$$

## 2- Encadrement d'un produit :

### Règles:

—

- Pour encadrer le produit  $a\sqrt{5}$ , on multiplie membre à membre les inégalités.

- Pour encadrer  $-a\sqrt{5}$ , on encadre d'abord  $| -a\sqrt{5} |$  puis on multiplie les membres de l'inégalité par (-1)

**Consigne :** On donne les encadrements :

$$0,571 \leq a < 0,572 \text{ et } 2,236 \leq \sqrt{5} < 2,237.$$

Trouve un encadrement d'ordre 1 et d'ordre 3 de  $a\sqrt{5}$  et  $-a\sqrt{5}$  **Rép :**

$$1,276756 \leq a\sqrt{5} < 1,279564$$

On en déduit les encadrements :

$$\text{Ordre 1: } 1,2 \leq a\sqrt{5} < 1,3$$

$$\text{Ordre 3 : } 1,276 \leq a\sqrt{5} < 1,277$$

$$\text{Ordre 1: } -1,3 \leq -a\sqrt{5} < -1,2$$

$$\text{Ordre 3 : } -1,277 \leq -a\sqrt{5} < -1,276$$

### 3- Encadrement d'un quotient :

**Règle :** Pour trouver un encadrement du quotient

$\frac{x}{y}$ , on procède comme

soit :  $a \leq x < b$  et  $c \leq y < d$  On fait :

$$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} < \frac{b}{c}$$

**Consigne :** On donne  $3,14 \leq \pi < 3,15$  et  $1,41 \leq \sqrt{2} < 1,42$

Trouve un encadrement du quotient  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$$\text{Rép : } 2,21126 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 2,23404$$

On en déduit les encadrements

$$\text{Ordre 1: } 2,2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 2,3$$

$\sqrt{2}$

< 2,3

$$\text{Ordre 2 : } 2,21 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 1,22$$

$$\text{Ordre 3 : } 2,211 \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} < 1,212$$

#### 4- Encadrement d'une racine carrée :

On extrait la racine carrée. Cela permet de trouver des encadrements d'un ordre aussi grand qu'on le souhaite.

**Consigne :** Trouve l'encadrement d'ordre 2 puis d'ordre 3 de  $\sqrt{147}$ .

**Exemple :**

147	12,124
-1	1 <sup>2</sup> =1
047	22×2=44
-44	241×1=241
0300	2422×2=4844
-241	14244×4=56976
05900	
-4944	
105600	
-56976	
45624	

$$\sqrt{147} = 12,124$$

**Ordre 2 :**  $12,1 \leq \sqrt{147} < 1,2$  ; **Ordre 3 :**  $12,124 \leq \sqrt{147} < 1,125$

## EXERCICES :

Soit  $x = 1,712123\dots$  et  $y = 2,513444\dots$

- a. Encadre  $x$  et  $y$  à  $10^{-1}$  près
- b. Encadre  $x$  et  $y$  à  $10^{-2}$  près
- c. Encadre  $x$  et  $y$  à  $10^{-3}$  près
- d. Encadre  $x + y$  à  $10^{-2}$  près
- e. Encadre  $8x$  et  $-4y$  à  $10^{-1}$  près

2) soit  $x = \frac{13}{7}$  et  $y = \frac{19}{17}$

- a) Trouve les valeurs approchées par défaut à  $10^{-3}$  près de  $x$  et de  $y$ .
- b) Encadre  $x + y$  à  $10^{-2}$  près
- c) Encadre  $3x - 2$  et  $-2y + 5$  à  $10^{-2}$  près
- d) Encadre  $\frac{x}{y}$  à  $10^{-1}$  près

3) On donne  $A = \sqrt{5} - 2\sqrt{7}$

Sachant que  $2,236 \leq \sqrt{5} < 2,237$  et que  $2,645 \leq \sqrt{7} < 2,646$ ,

- a) Donne l'encadrement d'ordre 1 de  $A$  ;
- b) Donne l'encadrement de  $A$  à  $10^{-2}$  près.
- c) Donne une valeur approchée à 0,001 près par excès de  $A$ .

### XIII- Equation du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ :

#### 1- Définition :

Une équation du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues peut se ramener sous la forme

$ax + by = c$ ,  $a, b, c$  sont des réels ;  $x$  et  $y$  sont les inconnues. **Exemples** :  $2x - 3y = -1$  ;  $x + y = 0$  ;  $2a - 2b = 5$  ; ... sont des équations du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues  $x, y$  et  $a, b$ .

#### 2- Vérification :

Les solutions d'une équation du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues sont les couples  $(x ; y)$  ;  $(a ; b)$  ;  
....

Un couple est solution d'une équation lorsqu'il vérifie cette équation. On remplace  $x$  et  $y$  par leur valeur dans l'équation.

**Consigne** : Soit l'équation  $3x - 2y + 6 = 0$

Les couples  $(-1 ; 1,5)$  ;  $(2 ; 2)$  ;  $(-4 ; -3)$  ;  $(-5 ; -0,5)$  sont-ils solutions de l'équation donnée ?

#### Comment trouver des couples ?

Soit l'équation  $3x - 2y + 6 = 0$ .

**Consigne** : Trouve deux couples solutions de l'équation donnée. **Consigne 2** : Détermine  $x$  ou  $y$  de manière que les couples suivants soient solutions de l'équation donnée :

$(x ; 6)$  ;  $(\frac{1}{-y})$  ;  $(x ; 0)$  ;  $(0 ; y)$  ;  $(x ; \sqrt{2})$  ;  $(-2 ; \bar{y})$ .

**Consigne :** Exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre.

**Exemple :**

y en fonction de x

| x en fonction de y

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$-2y = -3x - 6$$

$$2y = 3x + 6$$

$$y = \frac{3}{2}x + 3$$

Dans ce cas  $S = \{(x; y)\}$  ou

$$S = \{(x; \frac{3}{2}x + 3) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$3x - 2y + 6 = 0$$

$$3x = 2y - 6$$

$$x = \frac{2}{3}y - 2$$

Dans ce cas  $S = \{(x; y)\}$  ou

$$S = \{(\frac{2}{3}y - 2; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

### 3- Représentation graphique :

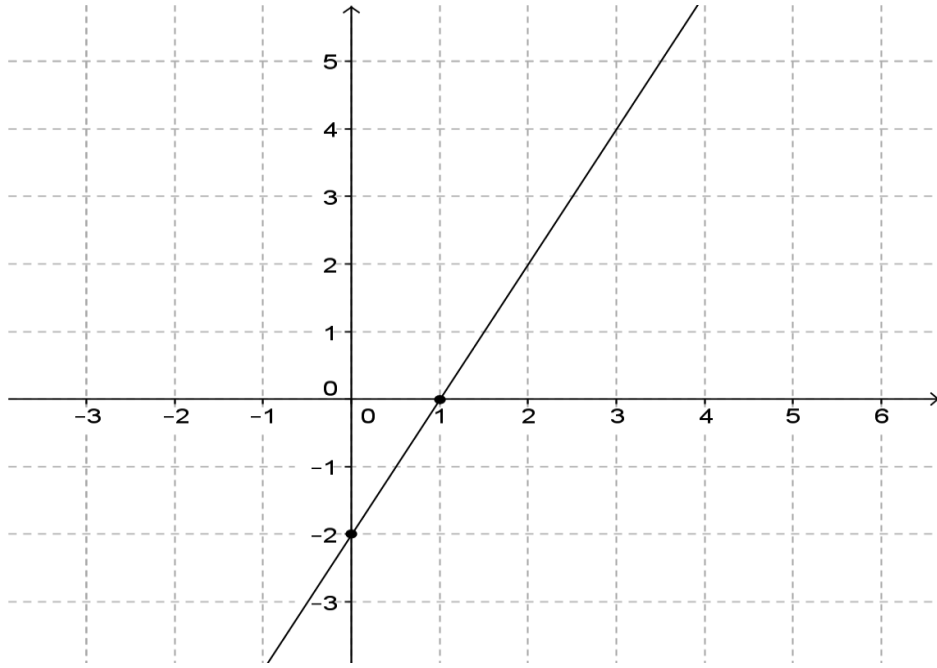
Pour représenter une équation du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues, il faut trouver deux couples solutions.

Dans un repère du plan, on place deux points dont les coordonnées sont les deux couples solutions de l'équation.

L'ensemble solution est représenté par la droite passant par ces deux points.

**Exemple :** Représentons graphiquement l'équation  $2x - y = 2$

Tableau des valeurs		
X	0	1
Y	-2	0



**Remarque :** La représentation graphique d'une équation du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues est une droite. Une droite étant illimitée alors une équation du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues admet une infinité de solutions.

Soit l'équation  $3x - 2y + 6 = 0$

**Consigne :** Dans un repère du plan, représente l'ensemble solution de l'équation donnée.

## EXERCICES :

1) On donne les équations :

$$5x - 3y = 2 \quad (1) \text{ et } 3x - y = 5 \quad (2)$$

a) Parmi les couples suivants  $(-1 ; -8)$ ,  $(-3 ; -4)$ ,  $(\frac{7}{2} ; 2)$  ;

$(1 + \sqrt{5} ; 3\sqrt{5} - 2)$ , quels sont ceux qui sont solutions de l'équation (1) ? De l'équation (2) ?

b) Détermine x ou y pour que les couples suivants soient solutions de l'équation (1) :  $(1 ; y)$ ,  $(2 ; y)$ ,  $(x ; \frac{1}{3})$  ;  $(x ; \frac{\sqrt{2}}{3})$ .

c) Trouve m, n, t et z tels que les couples  $(m ; 5)$ ,  $(-3 ; n)$ ,  $(t ; 1)$ ,  $(z ; -1 + \sqrt{2})$  soient solutions de l'équation (2).

2) On donne les équations

$$-x + 2y = 4 \quad (1) \quad \text{et} \quad 2x - y = 1 \quad (2)$$

Parmi les couples suivants :  $(\frac{1}{2} ; 0)$  ;  $(0 ; 1)$  ;  $(1 ; 1)$  ;  $(1 ; \frac{5}{2})$  ;  $(\frac{5}{2} ; 2)$  ;  $(2 ; 3)$ ,

Quels sont ceux qui sont solution :

- a) de l'équation (1) ;
- b) de l'équation (2) ;
- c) à la fois des équations (1) et (2) ?

3) Un élève a deux notes sur 20 en mathématiques, l'une de l'interrogation (note x) l'autre de devoir (note y). on appelle moyenne pondérée de cet élève le nombre  $m = \frac{3x+2y}{5}$  (on dit que x est affecté du coefficient 3 et y du coefficient 2).

- a) Calcule la moyenne pondérée de Karim qui a eu 12 en interrogation et 13 en devoir.
- b) Paul voudrait avoir 10 de moyenne pondérée. Il a eu 4 en devoir. Quelle note lui faut-il en interrogation ?
- c) Mariam a eu comme moyenne pondérée 14. Sa note d'interrogation est 16. Quelle est sa note de devoir ?

#### XIV- Système de deux équations du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

##### 1- Définition :

✚ Un système de deux équations du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues x et y  $ax + by = c$  (1)

est de la forme :  $\begin{cases} a'x + b'y = c' \\ ax + by = c \end{cases}$  avec a, b, c, a', b', c' des réels.

Cette représentation signifie  $ax + by = c$  et  $a'x + b'y = c'$

✚ Le mot « **et** » signifie en même temps ou à la fois ou simultanément.

Ainsi l'accolade a valeur de et.

✚ Lorsqu'il y a deux inconnues dans un problème, il faut en général deux équations pour les déterminer.

##### 2- Résolution :

Un système de deux équations du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues peut être résolu algébriquement ou graphiquement.

Un couple est solution du système lorsqu'il est à la fois solution des équations (1) et (2).

Si  $E_1$  est l'ensemble solution de l'équation (1) et  $E_2$  celui de l'équation (2) alors l'ensemble solution du système est  $S = E_1 \cap E_2$

##### - Résolution algébrique d'un système :

Soit à résoudre le système  $\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$

Résolvons ce système par différentes méthodes :

- **Méthode par substitution :**

**Règle :** On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans une des équations, par exemple dans (1) et on le remplace par sa valeur dans (2).

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

- On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre.

Par exemple dans (1) :  $y = 2x - 1$

- On remplace alors  $y$  par sa valeur dans (2), on obtient :

$$-x + 2(2x - 1) = 4 \text{ ce qui conduit à } x = 2 \text{ Donc } y =$$

$$2 \times 2 - 1 \text{ d'où } y = 3$$

L'ensemble solution du système est :  $S = \{(2; 3)\}$  **Activité 1**

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

**Consigne :** Résous par cette méthode

$$\text{Rép : } S = \{(1; 2)\}$$

### - Méthode par élimination ou par addition :

**Règle :** On choisit l'inconnue que l'on va « faire disparaître », on multiplie chaque équation par un nombre de façon qu'en ajoutant les équations l'inconnue choisie « disparaisse » ; on résout l'équation à une inconnue obtenue.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

En choisissant de « faire disparaître »  $y$ , on multiplie l'équation (1) par 2 ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

En faisant la somme des deux équations, on obtient :  $3x = 6$  d'où  $x = 2$

On choisit de « faire disparaître » ensuite  $x$ , on multiplie l'équation (2) par 2 ainsi, on obtient :

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -2x + 4y = 8 & (2) \end{cases}$$

En faisant la somme des deux équations, on obtient :  $3y = 9$  d'où  $y = 3$  L'ensemble solution du système est :  $S = \{(2; 3)\}$

**Consigne :** Résous par cette méthode  $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$

- **Méthode par comparaison :**

**Règle :** On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans les deux équations puis on égalise les deux résultats ; on résout l'équation à une inconnue obtenue.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Dans (1) :  $y = 2x - 1$  Dans (2)

$$: y = \frac{1}{2}x + 2$$

Ainsi on a :  $2x - 1 = \frac{1}{2}x + 2$  d'où  $x = 2$  ; on fait de même pour trouver  $y$ .

$$S = \{(2; 3)\}$$

**Consigne :** Résous par cette méthode

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

- **Méthode mixte :** Elle consiste à déterminer une des inconnues par

une méthode et l'autre inconnue par une autre méthode.

**Consigne :** Résous par cette méthode

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 2 \end{cases}$$

- **Résolution graphique d'un système :**

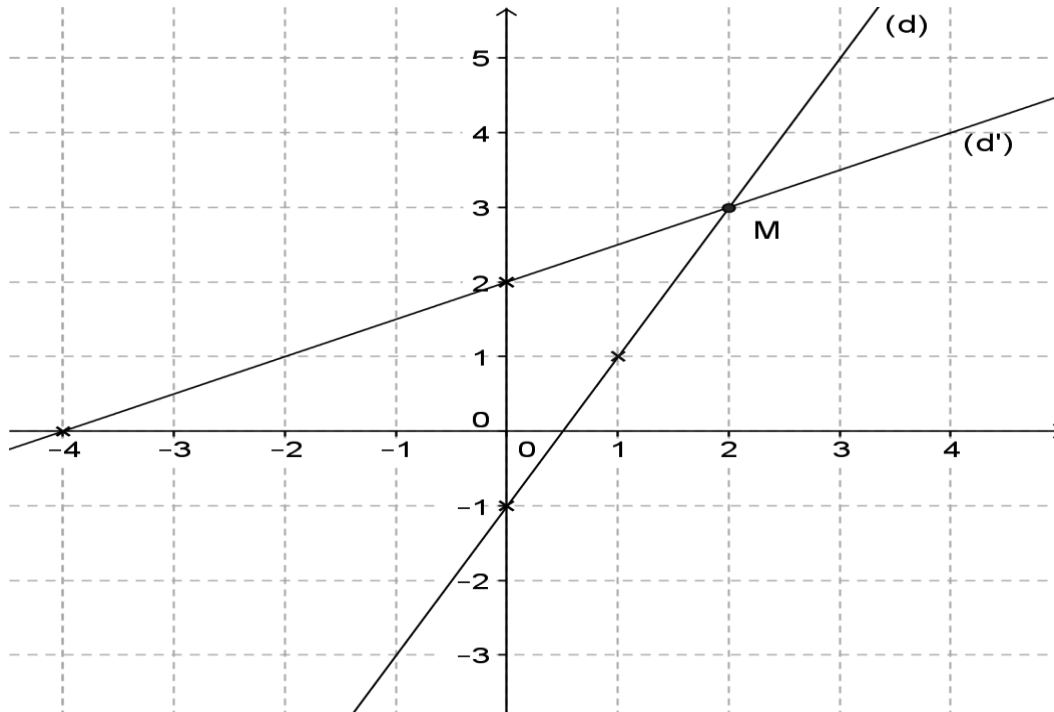
**Méthode :** Dans un repère du plan, on trace la droite représentative de chacune des deux droites du système. La solution du système si elle existe est graphiquement le couple de coordonnées du point d'intersection des deux droites.

**Exemple :** Résolvons graphiquement le système

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ -x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Soit : (d) :  $2x - y = 1$  et (d') :  $-x + 2y = 4$  On trace les droites (d) et (d')

	$2x - y = 1$		$-x + 2y = 4$	
x	0	1	0	-4
y	-1	1	2	0



Graphiquement les droites (d) et (d') se coupent en M (2 ; 3). Donc  $S = \{(2 ; 3)\}$

**Consigne :** Résous graphiquement le système suivant :  $2x - y = 1$  (1)  
 $-x + 2y = 4$  (2)

## UTILISATION DES SYSTEMES DE DEUX EQUATIONS POUR RESOUDRE DES PROBLEMES CONCRETS :

Pour résoudre un problème ; il faut suivre les cinq (5) étapes suivantes :

1. Choix de l'inconnue et contraintes
2. Mise en équation : (C'est traduire l'énoncé par une équation)
3. Résolution de l'équation
4. Conclusion
5. Vérification

**Exemple :** Mon oncle possède des poules et des moutons. On compte 11 têtes et 30 pattes.

Détermine le nombre de poules et de moutons de mon oncle.

### - Choix des inconnues et contraintes :

Soit  $x$  le nombre de moutons et  $y$  le nombre de poules.  $x$  et  $y$  sont des nombres naturels.

### - Mise en équation :

On sait que :

Un mouton a une tête et une poule a une tête donc :  $x + y = 11$

Un mouton a quatre pattes et une poule a deux pattes :  $4x + 2y = 30$  On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases}$$

### - Résolution du système :

L'ensemble solution du système est :  $S = \{(4; 7)\}$  **Conclusion :**

Mon oncle possède : 4 moutons et 7 poules.

**Vérification :**

Les têtes :  $4 + 7 = 11$

et Les pattes :  $4 \times 4 + 2 \times 7 = 16 + 14 = 30$

**Consigne :** Une élève de 6<sup>ème</sup> Année fait des courses pour elle et ses camarades :

- la première fois, elle achète 5 crayons et 2 gommes pour 325F ;
- la seconde fois, elle achète 8 crayons et 3 gommes pour 500F.

En utilisant un système d'équations, aider l'élève de 6<sup>ème</sup> Année à retrouver le prix de chaque article.

### SYSTEMES PARTICULIERS :

**Consigne :**

Résous graphiquement le système suivant. Que constates-tu ?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Résous algébriquement le même système et conclus. **Activité 7**

**Consigne :**

Résous le système suivant. Que constates-tu ?

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

Résous algébriquement le même système et conclus.

**Synthèse :** Un système peut avoir, une solution unique, une infinité de solutions ou ne pas avoir de solution.

Si le système admet :

- une solution unique : les deux droites représentatives sont sécantes ;
- une infinité de solutions : les deux droites représentatives sont confondues ;
- pas de solution : les deux droites représentatives sont strictement parallèles.

## EXERCICES :

1) Résous les systèmes suivants :

$$\begin{cases} +y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} ; \begin{cases} 0,6x + 0,3y - 3 = 0 \\ 8x + 4y - 2 = 0 \end{cases}$$

2) On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -2x + y = 9 \end{cases}$$

Soit  $E_1$  l'ensemble des solutions de la première équation et  $E_2$  l'ensemble des solutions de la deuxième équation.

a) Montre que  $(4 ; -4) \in E_1$  et  $(5 ; 3) \notin E_2$ .

b) Détermine  $E_1 \cap E_2$

3) Dans un plan muni du repère orthonormé  $(O, i, j)$ , on considère les droites (D) et (L), d'équations respectives suivantes :

$$(D) : \quad 3x + 2y - 4 = 0$$

$$(L) : \quad 2x - y + 9 = 0$$

a) Détermine les coordonnées de leur point d'intersection A.

b) Construis (D) et (L).

4) On considère le système d'équations :

$$\begin{cases} 2x + 6y = -3 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

a) Résous le système.

b) Trace sur un même graphique dans un plan muni d'un repère  $(O, i, j)$ , les droites représentatives de chacune des équations du système.

c) Vérifie graphiquement les résultats de la première question.

5)  $x$  et  $y$  désignent des nombres réels.

$$\text{On considère} \quad A = (x - 1)(6y + x) - (x - 3)^2$$

$$B = 6xy + 2x - 9y - 9$$

- a) Développe et réduis A.
- b) Montre que  $A - B$  peut s'écrire  $3(x + y)$ .
- c) Calcule la somme  $x + y$  pour que  $A - B$  soit égale à 15.

d) Résous le système :  $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - 9y = -17,5 \end{cases}$

e) Calcule pour  $x = \frac{5}{2}$  et  $y = \frac{5}{2}$

- La somme  $x + y$ ,
- La différence  $A - B$ ,
- La valeur prise par B.
- 

**6)** Deux entiers  $m$  et  $p$  sont tels que :

$$m^2 - p^2 = 304 \text{ et } m + p = 38. \text{ Calcule } (m - p) \text{ puis } m \text{ et } p.$$

**7)** Un groupe d'élèves cotise pour faire un cadeau à un maître.

Si chacun versait 775F, alors il leur manquerait 375F. Mais si chacun d'eux versait 830F, alors il y aurait 450F en trop.

- a)** Détermine le nombre d'élèves du groupe et la valeur du cadeau.
- b)** Détermine ce que chacun doit verser.

**8)** Deux champs carrés ont pour côté  $x$  et  $y$ .

La somme des aires des deux champs est  $1850 \text{ m}^2$ .

On donne un champ rectangulaire de dimensions  $x$  et  $y$ , sa surface étant  $xy = 875 \text{ m}^2$ .

- a)** Calcule le périmètre du rectangle.
- b)** Calcule la différence des côtés.
- c)** Calcul les dimensions du rectangle.

**9)** Au marché Binta a acheté des œufs à 50F l'unité. Sa fille très turbulente en casse 10. Elle revend le reste à 60F l'unité et réalise un bénéfice égal au dixième du prix d'achat des œufs.

- a)** Combien d'œufs Binta a-t-elle acheté ?
- b)** Quel est le bénéfice réalisé ?

## XV- Application linéaire :

### 1- Définition :

On appelle application linéaire, toute relation du type =

$$ax \text{ ou } (x) = ax, a \in \mathbb{R} . \mathbf{x a}$$

**pour image y ou f(x)**

**Exemples :**  $y = 2x$  ;  $y = x\sqrt{2}$  ;  $g(x) = 1,7\overline{x}$  ;  $(x) = \frac{-5}{2}x$  sont des applications linéaires.

### 2- Représentation graphique :

Soit l'application linéaire  $y = 2x$  ou  $f(x) = 2x$ . **Consigne**

**1 :** Complète le tableau suivant :

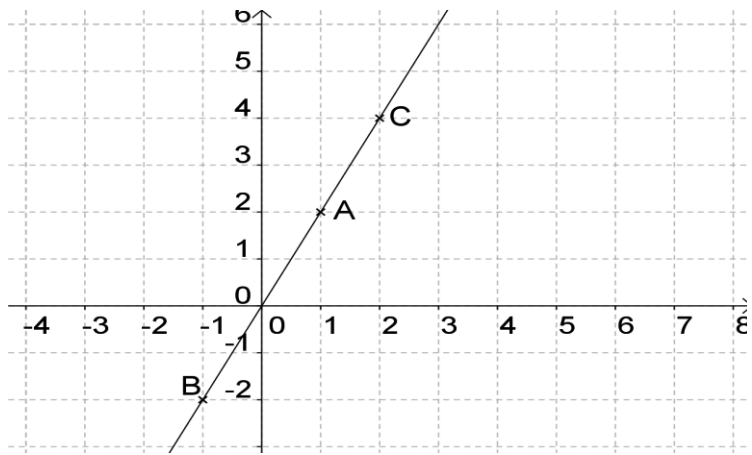
Point	O	A	B	C
X	0	1		
y			-2	4

**Consigne :** Place les points A, B, C dans un repère  $(o; i; j)$ . Trace la droite (AC). Que constates-tu ?

**Exemple :**

Complète le tableau suivant :

Point	O	A	B	C
X	0	1	-1	2
y	0	2	-2	4



**Constat :** Les points O, A, B, C sont alignés.

**Conclusion :** La représentation graphique d'une application linéaire est une droite passant par l'origine du repère et le point de coordonnées (1 ; a).

a est le coefficient directeur de la droite.

Si le repère est orthonormé, a est appelé la **pen**te.

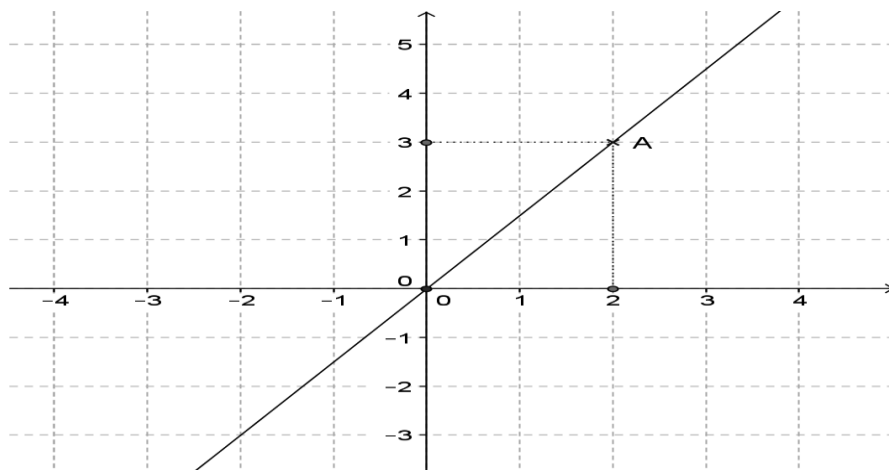
**Consigne 3 :** Représente graphiquement les applications linéaires

suivantes :  $y = -x$ ;  $y = x$  et  $y = \frac{5}{2}x$ .

### 3- Détermination d'une application linéaire :

Déterminer une application linéaire  $y = ax$ , c'est trouver son coefficient directeur a.

**Consigne :** Détermine la relation du type  $y = ax$  qui correspond au graphique ci-dessous.



### Exemple :

La droite passe par le point A(2 ; 3) ce qui correspond à : Si  $x = 2$

alors  $y = 3$

sachant que  $y = ax$  on:  $3 = 2a$  ;

alors  $a = \frac{1}{2}$  ainsi la relation est:  $y = \frac{1}{2}x$  —

**Consigne :** Détermine l'application linéaire  $f$  telle que  $f(2) = 4$ .

Rép :  $f(x) = 2x$ .

## EXERCICES :

**a.** Soit  $f$  une application linéaire ( $f(x) = ax$ )

A l'aide du tableau suivant, détermine le coefficient  $a$  et complète le tableau.

x	2	6. 10 <sup>-3</sup>	-3√5		
f(x)	$\frac{4}{3}$			$\frac{2}{\sqrt{2} + 1}$	2 <sup>3</sup>

**b.** Trouve la relation du type  $y = ax$  sachant que :

- i. Si  $x = -1$  alors  $y = 1$
- ii. Si  $x = -1$  alors  $y = 2$
- iii. Si  $x = 4$  alors  $y = 2$

**c.** Détermine les applications linéaires  $f, g, h$  et  $k$  telles que :

$$f(10) = 5 ; g(\sqrt{2}) = 2 ; h\left(\frac{3}{2}\right) = -1 ; k\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

**d.** Représente graphiquement chacune des applications linéaires

suyvantes :  $f(x) = 4x ; g(x) = -3x ; h(x) = \frac{1}{2}x$ .

**e.** La représentation d'une droite passe par l'origine du repère et le point de coordonnées  $(-5 ; -3)$ . Quelle est l'application linéaire correspondante à cette droite ?

**f.** Un vidéo- club propose la formule suivante de location de cassettes : Formule : sans abonnement, 40F par cassette louée.

Complète le tableau suivant après l'avoir reproduit.

x est le nombre de cassettes louées en un an	0	2	5	12
p(x) représente la dépense				

Exprime  $p(x)$  en fonction de  $x$ . Précise la nature de  $p$ .

Dans un repère orthonormé représente graphiquement l'application  $p$  (on prendra 1 cm pour une cassette en abscisse et 1 cm 50F en ordonnée).

## XVI- INEQUATION DU 1<sup>ER</sup> DEGRE A UNE INCONNUE dans $\mathbb{R}$ :

### 1- Rappels :

Si  $a > b$  et  $m$  un réel positif alors  $a \cdot m > b \cdot m$  Si  $a > b$  et  $m$  un réel négatif alors  $a \cdot m < b \cdot m$

**Consigne :** Résous et interprète graphiquement l'ensemble solution des inéquations :  $4x - 1 > x + 2$  et  $2x + 2 > 3x + 5$

### 2- Résolution :

Un système d'inéquations est composé de deux ou plusieurs inéquations du 1<sup>er</sup> degré à une inconnue.

Résolution : Pour résoudre un système d'inéquations, on résout séparément chacune des inéquations.

Les solutions du système sont des nombres qui sont à la fois solution des inéquations qui composent le système.

**Exemple :** Soit à résoudre le système :  $\begin{cases} 4x - 7 \leq 5 \\ 3x - 8 < 5x - 4 \end{cases}$

$$4x - 7 \leq 5$$

$$4x \leq 5 + 7$$

$$4x \leq 12$$

$$x \leq 3$$

$$S_1 = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq 3\}$$
 Ensemble

solution du système :

$$S = S_1 \cap S_2 = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq 3 \text{ et } x > -2\}$$

$$3x - 8 < 5x - 4$$

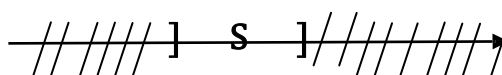
$$3x - 8 < 5x - 4$$

$$3x - 5x < -4 + 8$$

$$-2x < 4$$

$$x > -2$$

$$S_2 = \{x/x \in \mathbb{R}, x > -2\}$$



### 3- Représentation graphique

**Consigne :** Résous et interprète graphiquement l'ensemble solution du

$$\text{Système : } \begin{cases} 2 + x < 6 - 3x \\ 3(x + 1) < x + 4 \end{cases}$$

#### 4- INEQUATION SE RAMENANT A LA RESOLUTION DE SYSTEME :

**Rappels :**

⬇ Tout nombre positif est supérieur ou égal à 0 : Si  $x$  est positif alors  $x > 0$

⬇ Tout nombre négatif est inférieur ou égal à 0 : Si  $x$  est négatif alors  $x \leq 0$

⬇ Si  $ab \geq 0$  alors  $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

⬇ Si  $ab \leq 0$  alors  $\begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$

**Exemple :** Soit à résoudre l'inéquation :  $(x - 2)(x + 3) \leq 0$

Il s'agit ici de trouver l'ensemble des nombres tels que le produit suivant  $(x - 2)(x + 3)$  soit négatif.

$$(x - 2)(x + 3) \text{ négatif si : } \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 3 \leq 0 \end{cases} (1) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ x + 3 \geq 0 \end{cases} (2)$$

$S_1 = \emptyset$  ;  $S_2 = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \text{ et } x \geq -3\}$  Ensemble solution de l'inéquation est alors :

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x/x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \text{ et } x \geq -3\} \text{ **Activité 3**}$$

**Consigne :** Résous l'inéquation :  $(x - 1)(2x + 3) > 0$

### Exercices :

- a.** Résous, dans  $\mathbb{R}$ , et interprète graphiquement l'ensemble solution des systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} 3(4x - 3) > 3x + 4 \\ 4(x - 4) > 3x - 14 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 15x - 2 > x + \frac{1}{3} \\ 4(x - 4) < 3x - 14 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} 6x + \frac{5}{7} > 4x + 7 \\ \frac{8x + 2}{2} < 2x + 25 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 8(x - 2) + 19 \geq \frac{15 + 8}{2} \\ 2(2x + 3) \geq \frac{20x + 2}{4} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} x < \frac{x + 1}{3} - 4 \\ \frac{x}{2} > \frac{3x}{4} + 1 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{12} - \frac{x}{8} < 2x + \frac{13}{6} \\ \frac{14}{15}x - 3 \leq \frac{1}{5}x - \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

- b.** La somme de quatre entiers consécutifs est plus grande que 2006. Que peut-on en déduire pour le plus petit de ces entiers ?
- c.**
- Quels sont les entiers dont le triple augmenté de dix est inférieur à quarante ?
  - Quels sont les entiers dont le double diminué de quatre est supérieur à douze ?
  - Est-il exact qu'un seul entier vérifie les deux conditions précédentes ?

**XVII- Application affine :**

**1- Définition :**

On appelle application affine, toute relation du type

$$y = ax + b \text{ ou } (x) = a x + b, a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

$x$  a pour image  $y$  ou  $f(x)$ .

**Exemples :**  $y = 2x + 7$ ;  $y = x\sqrt{2} - 1$  ;  $g(x) = 1,7x - 5$  ;  $f(x) = \frac{-5}{2}x + 3$  sont

des applications affines.

Soit l'application affine  $y = 2x + 1$  ou  $f(x) = 2x + 1$ . **Consigne 1 :**

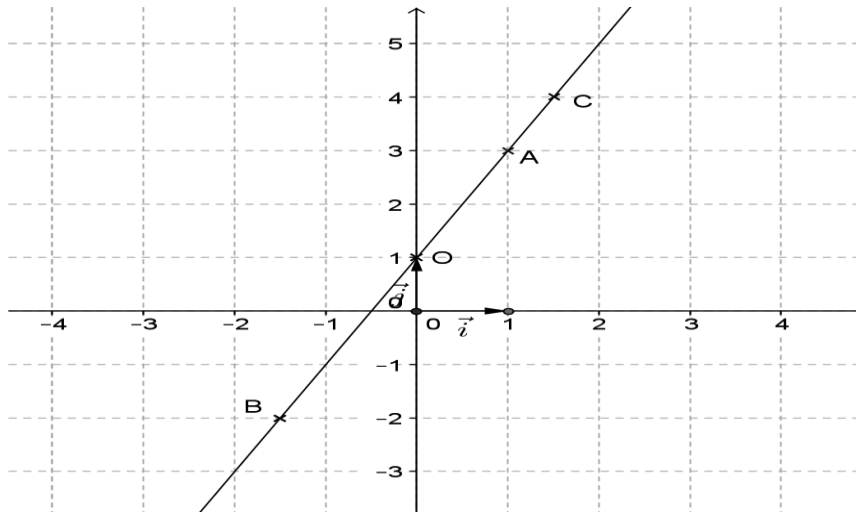
Complète le tableau suivant :

Points	O	A	B	C
x	0	1		
y			-2	4

**Consigne :** Représente les points A, B, C dans un repère  $(o; i; j)$ . Trace la droite (AC). Que constates-tu ?

**Exemple :**

Points	O	A	B	C
x	0	1	-3/2	3/2
y	1	3	-2	4



**Constat :** Les points O, A, B, C sont alignés.

**Conclusion :** La représentation graphique d'une application affine est une droite.

Le réel **a** est le coefficient directeur de la droite. Si le repère est orthonormé, **a** est appelé la  **pente**.

## 2- Représentation graphique :

**Consigne :** Représente graphiquement les applications affines suivantes :

$$y = -x + 1; y = x - 1 \text{ et } y = \frac{5}{2}x - 2.$$

## 3- Détermination :

Déterminer une application affine  $y = ax + b$ , c'est trouver les réels **a** et **b**.

### a. Méthode algébrique :

**Consigne :** Détermine l'application affine  $f$  telle que :

$$f(2) = 1 \text{ et } f(-2) = 3.$$

**Exemple :**

$$f(x) = ax + b$$

$$f(2) = 2a + b = 1 \quad \text{et } f(-2) = -a + b = 3$$

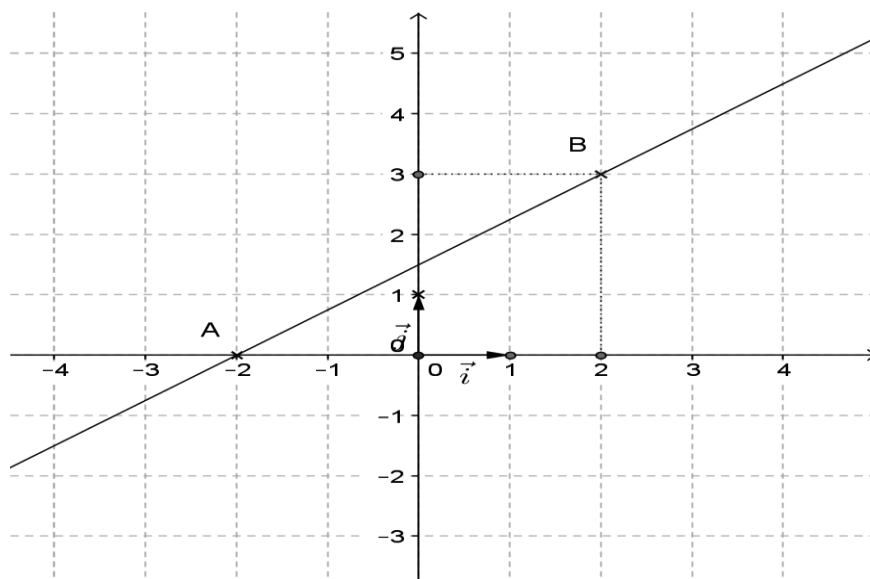
$$\text{On résout le système } \begin{cases} 2a + b = 1 \\ -a + b = 3 \end{cases}$$

$$-2a + b = 3$$

$$\text{On trouve } a = -\frac{1}{2} \text{ et } b = 2 \text{ ainsi } f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$$

### b. Méthode graphique :

**Consigne :** Détermine la relation du type  $y = ax + b$  qui correspond au graphique ci-dessous.



**Exemple :**

La droite représentative de  $y = ax + b$  passe par les points A(-2 ;0) et B(2 ;3), ainsi

pour  $x = -2$  alors  $y = 0 : 0 = -2a + b$

pour  $x = 2$  alors  $y = 3 : 3 = 2a + b$

On résout le système  $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ -2a + b = 0 \end{cases}$

$$-2a + b = 0$$

On trouve  $a = \frac{3}{4}$  et  $b = \frac{3}{2}$  ainsi  $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

## EXECCICES :

- 1) Soient les applications f, g, h telles que : a)  $f(3) = 4$  et  $f(-1) = 2$   
b)  $g(\sqrt{2}) = 0$  et  $g(-\sqrt{2}) = 4$   
c)  $h(1) = \sqrt{2}$  et  $h(3) = 0$
- 2) Dans les cas suivants, détermine la relation du type  $y = ax + b$  sachant que :
- a) si  $x = 2$  alors  $y = -3$  et si  $x = -2$  alors  $y = 1$
  - b) si  $x = 2$  alors  $y = -5$  et si  $x = -1$  alors  $y = 1$
  - c) si  $x = 4$  alors  $y = -1$  et si  $x = -1$  alors  $y = -3,5$
- 3) Détermine l'application affine f telle que :  
 $f(2) = -5$  et  $f(-1) = 1$
- a) Trouve l'image de 2 par f.
  - b) Trouve l'antécédent de -7 par f.
  - c) Représente graphiquement l'application f.
- 4) Soit les points A(-1 ; -1), B(2 ; 2) et C(-1 ; 2).
- a) Détermine l'application affine dont la représentation graphique passe par les points A et B.
  - b) Le point C appartient-il à cette représentation ?
- 5) Un vidéo- club propose deux formules de location de cassettes : Formule A :  
abonnement de un an pour 150F, ensuite 25F par cassette louée.  
Formule B : sans abonnement, 40F par cassette louée.

a) Complète le tableau suivant après l'avoir reproduit.

x est le nombre de cassettes louées en un an	0	2	5	12
A(x) représente la dépense avec la formule A				
B(x) représente la dépense avec la formule B				

b) Exprime  $A(x)$  et  $B(x)$  en fonction de  $x$ . Précise la nature de A et B.

- c) Dans un repère orthonormé représente graphiquement les applications A et B (on prendra 1 cm pour une cassette en abscisse et 1 cm 50F en ordonnée).
- d) Pour quel nombre de cassettes, le prix des formules A et B est-il le même ?
- e) A partir de combien de cassettes la formule A devient-elle la plus avantageuse ?

6) On considère l'application polynôme, notée  $f_m$  qui associe à tout nombre réel  $x$  son image  $f(x) = \frac{3m+x}{m} - \frac{mx-9}{2}$  ou  $m$  est un réel donné.

- a) Montre que  $f_m$  est une application affine.
- b) Détermine  $m$  pour que  $f_m$  soit une application linéaire. Soit  $g$  cette application.
- c) Détermine  $m$  pour que  $f_m$  soit une application constante. Soit  $h$  cette application.
- d) Détermine  $m$  pour que  $f_m(3)$  soit nul. Soit  $i$  l'application obtenue.
- e) Construis dans un repère orthonormé les représentations de  $g$ ,  $h$  et  $i$ .

7) Détermine une application affine  $g$  dont la représentation graphique a pour coefficient directeur  $-2$  et passe par le point de coordonnées

$(3; -3)$

8) Soit l'application affine  $g$  définie par :  
 $(x) = ax + b$  et telle que  $g(4) = -13$  et  $g(-9) = 52$ .

a) Calcule  $a$  et  $b$ .

b) Trouve les images de  $-3$ ;  $0,9$ ;  $\frac{4}{3}$  et de l'inverse de  $-5$  par  $f$ .

c) Trouve antécédents des réels suivants par  $f$ :  $-8$ ;  $\sqrt{2}$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $-\frac{1}{3}$ ;  $(-2)^3$ .

## XVIII- INEQUATIONS DU 1<sup>ER</sup> DEGRE A DEUX INCONNUES :

### 1- Exemples :

Les équations

$2x + 3y < 5$  ;  $y \geq 7x - 1$  ;  $ax + by + c \leq 0$  sont des inéquations du premier degré à deux inconnues.

### 2- Théorème :

La droite d'équation  $ax + by + c = 0$  partage le plan en deux demi-plans (régions) dans l'une  $ax + by + c \leq 0$  et dans l'autre

$$ax + by + c \geq 0.$$

**3- Résolution :** Pratiquement, la résolution d'une inéquation du premier degré à deux inconnues est graphique.

**Méthode :** Pour résoudre l'inéquation  $ax + by + c \leq 0$ ,

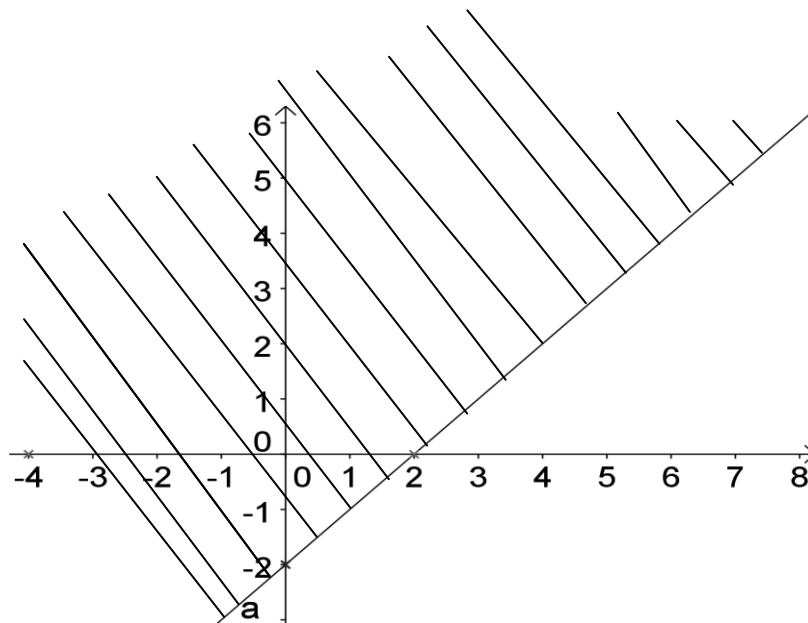
- On trace la droite d'équation  $ax + by + c = 0$
- On vérifie pour un couple de l'une des deux régions
- Si le couple est solution, sa région est solution ; si le couple n'est pas solution, sa région n'est pas solution et on la hachure.

**Exemple:** Soit à résoudre l'inéquation :  $x - y \geq 2$

$x - y = 2$		
x	0	2
y	-2	0

Vérifions si le couple  $(0 ; 0)$  est solution

$0 - 0 \geq 2$  fausse donc le couple  $(0 ; 0)$  n'est pas solution. On hachure la région contenant l'origine  $(0 ; 0)$  du repère.



**Consigne :** Résous graphiquement, dans le même repère, les inéquations  $2x - 3y \geq 6$  ;  $2x + y - 3 < 0$

#### 4- SYSTEME D'INEQUATIONS DU 1<sup>ER</sup> DEGRE A DEUX INCONNUES :

Un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues est

composé de deux ou plusieurs inéquations du premier degré à deux inconnues

##### a. Résolution :

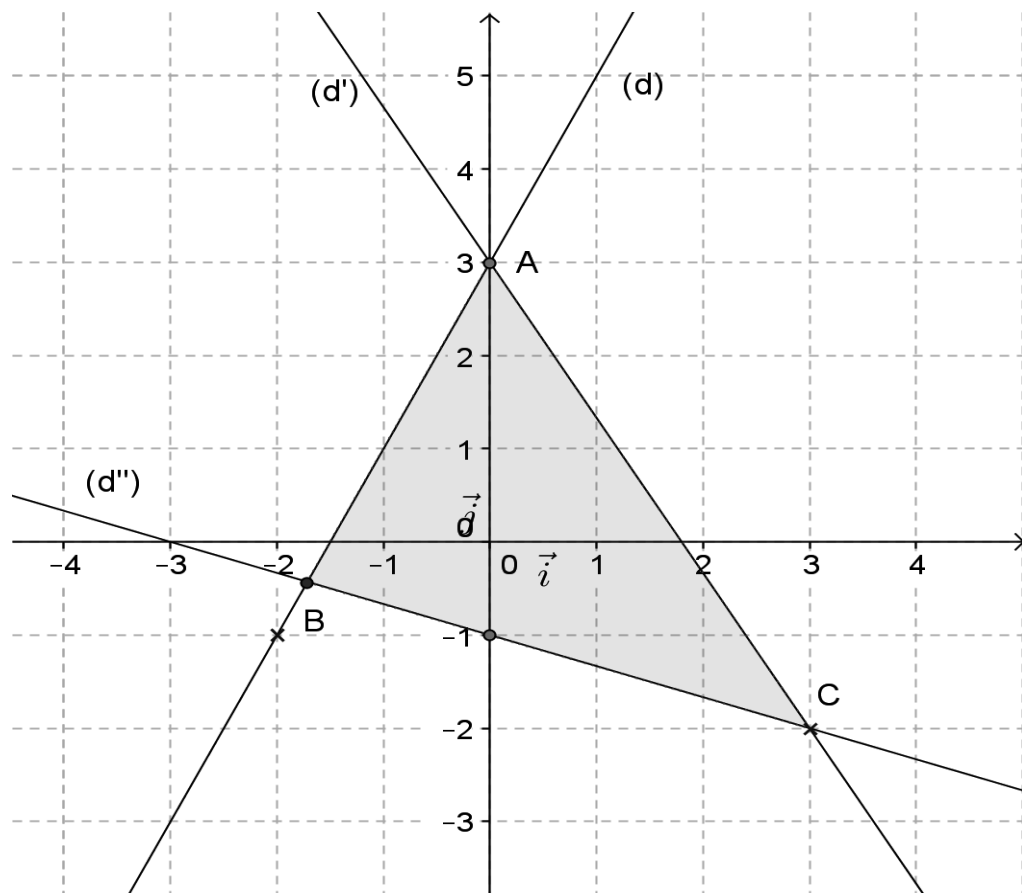
Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations du premier degré à deux inconnues, on résout graphiquement chacune des inéquations.

L'ensemble solution du système est l'intersection des ensembles solutions des inéquations qui composent le système.

**b. Exemple:** Soit à résoudre graphiquement le système

$$\begin{aligned} 2x - y + 3 &\geq 0 && (1) \\ \text{suivant : } \{5x + 3y - 9 &\leq 0 && (2) \\ x + 3y + 3 &\geq 0 && (3) \end{aligned}$$

	<b>(d)</b> : $2x - y + 3 = 0$		<b>(d')</b> : $5x + 3y - 9 = 0$		<b>(d'')</b> : $x + 3y + 3 = 0$	
x	0	-2	0	3	0	3
y	3	-1	3	-2	-1	-2



Le couple  $(0 ; 0)$  est solution de chacune des inéquations (1), (2) et (3).

Soit  $(d) \cap (d') = \{A\}$   $(d) \cap (d'') = \{C\}$   $(d') \cap (d'') = \{B\}$

L'ensemble solution du système est  $S$ , la partie du plan limité par le triangle  $ABC$ .

## EXERCICES :

1) Résous graphiquement les inéquations et indique trois solutions à titre d'exemple.

a)  $8x - 4y + 3 \geq 2x - 14y;$

c)  $(2x + y) - (x - 3y + 1) \leq x + y$

b)  $(4x - 5) - (2y + x) \leq 3x + y + 2;$

d)  $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{4}{x-2}$

2) Résous graphiquement les systèmes et indique trois solutions à titre d'exemple.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 2 \geq 0 \\ 7x + 4y + 4 \leq \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 4x - 3y \leq 4 \\ 5x - 4y \geq 1 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} \frac{x-2y}{3} \leq 4-2y \\ 4x \geq \frac{x-y}{2} \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} 5x + 4y - 10 \leq 0 \\ 2x + 2y - 3 \leq 0 \\ 4x + 2y - 5 \geq 0 \end{cases}$$

3) Résous graphiquement l'inéquation et le système suivants :

$$2x - 4y > -8; \quad \begin{cases} 2x + y > 5 \\ x - 3y > 6 \end{cases}$$

## XIX- Application affine par morceaux (ou par intervalles)

### 1- COÏNCIDENCE SUR UNE PARTIE DE $\mathbb{R}$ :

Deux applications  $f$  et  $g$  coïncident sur une partie  $I$  de  $\mathbb{R}$  lorsque pour tout  $x$  élément de  $I$ ,  $f(x) = g(x)$ .

### 2- Définition :

On appelle application affine par morceaux (ou par intervalles), toute application qui coïncide sur des parties de  $\mathbb{R}$  avec des applications affines.

### Exemples :

L'application  $f$  définie par :  $f(x) = |x|$  ou  $\begin{cases} \text{si } x \geq 0, f(x) = x \\ \text{si } x \leq 0, f(x) = -x \end{cases}$  ;

L'application  $g$  définie par :  $\begin{cases} \text{si } x \leq 2, g(x) = -x \\ \text{si } x > 2, g(x) = 0,5 \end{cases}$  ; et

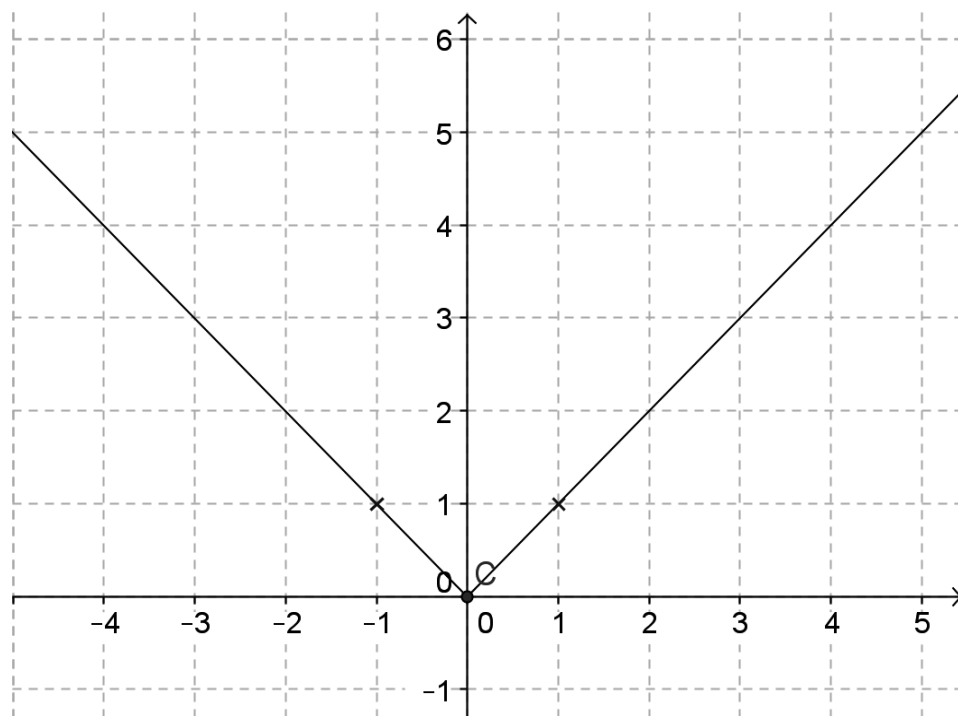
L'application  $h$  définie par :  $\begin{cases} \text{si } -2 \leq x \leq 3, h(x) = 2x - 1 \\ \text{si } 3 \leq x \leq 4, h(x) = 3x \\ \text{si } 4 \leq x \leq 6, h(x) = -2 \end{cases}$  sont des d'applications affines par morceaux.

### 3- Représentation graphique :

**Exemple :** soit à représenter l'application  $f$  définie

par :  $f(x) = |x|$  ou  $\begin{cases} \text{si } x \geq 0, f(x) = x \\ \text{si } x \leq 0, f(x) = -x \end{cases}$

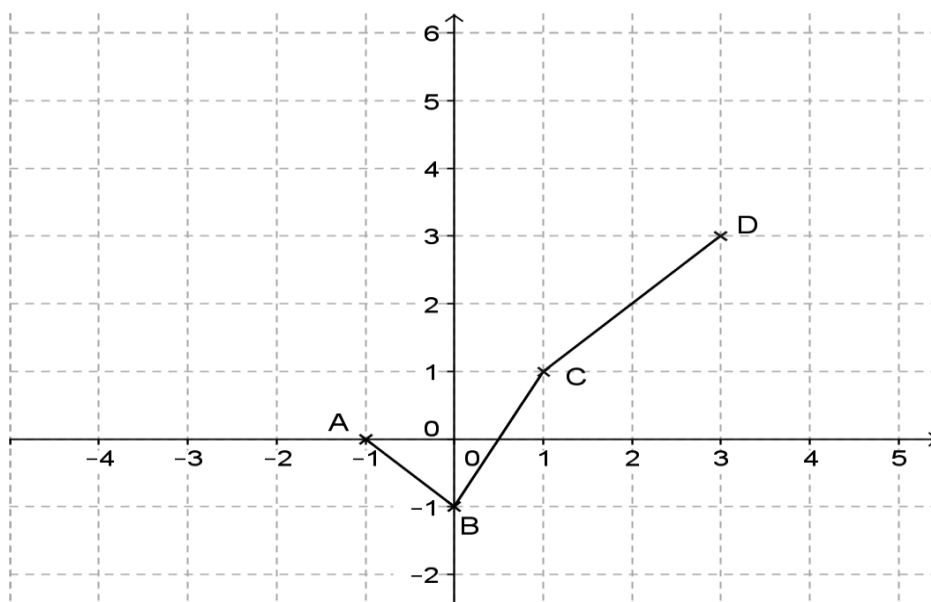
On représente les droites d'équations respectives  $y = x$  et  $y = -x$ . La représentation de  $f$  est la réunion des deux demi-droites vérifiant les expressions de  $f$ .



**Consigne :** Représente l'application  $h$  définie par :

$$\begin{cases} \text{si } -2 \leq x \leq 0, & h(x) = 2x - 1 \\ \text{si } 0 \leq x \leq 1, & h(x) = 3x \\ \text{si } 1 \leq x \leq 4, & h(x) = -2 \end{cases}$$

**Exemple :** Définir à l'aide de formules appropriées l'application  $p$  représentée par le graphe suivant :



D'après le graphique :

Pour  $x \leq 0$ , p coïncide avec la droite (AB)

Pour  $0 \leq x \leq 1$ , p coïncide avec la droite (BC) Pour  $1 \leq$

$x \leq 3$ , p coïncide avec la droite (CD)

Il s'agit de trouver les applications affines correspondantes aux droites (AB), (BC) et (CD)

D'après le graphique :

A(-1 ;0), B(0 ; -1) C(1 ;1) et D(3 ;3)

$$\text{si } x \leq 0, (x) = -x - 1$$

L'application p est définie par : {si  $0 \leq x \leq 1$ ,  $(x) = 2x - 1$

$$\text{si } 1 \leq x \leq 3, (x) = x$$

## EXERCICES :

Représente graphiquement les applications affines par morceaux suivantes :

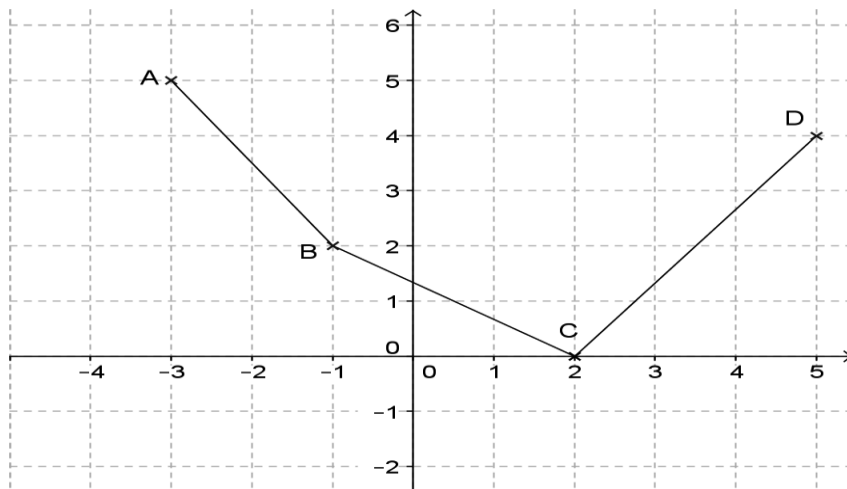
$$\begin{aligned} & \text{si } -2 \leq x < 0, f(x) = 1 \\ & \text{si } 0 \leq x < 2, f(x) = x - 1 \\ & \text{si } 2 \leq x < 3, f(x) = 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{si } x \leq -1, f(x) = 2 \\ \text{b) } & \text{si } -1 < x \leq 1, f(x) = -2x \\ & \text{si } x \geq 1, f(x) = -2 \end{aligned}$$

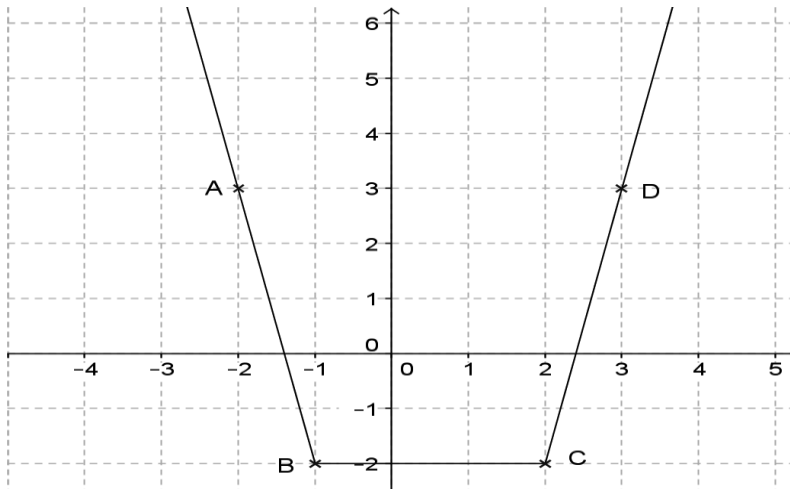
$$\begin{aligned} & \text{si } 0 \leq x < 1, h(x) = x \\ \text{c) } & \text{si } 1 \leq x < 2, h(x) = 1 \\ & \text{si } 2 \leq x < 3, h(x) = x - 2 \\ & \text{si } 3 \leq x < 4, h(x) = 1 \end{aligned}$$

Détermine les applications affines par morceaux dont les représentations graphiques sont les suivants :

**a)**



b)



Soient  $f$  et  $g$  les applications affines définies par :

$$f(x) = \frac{x}{2} + 3; g(x) = -2x + 3$$

1- Représente graphiquement dans un repère orthonormé les applications f et g.

2- Soit h l'application affine par intervalles définie par :

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x}{2} + 3 \text{ lorsque } x \text{ est strictement négatif} \\ h(x) = -2x + 3 \text{ lorsque } x \text{ est positif} \end{cases}$$

3- Résous graphiquement les équations :

$$h(x) = 4 \text{ et } h(x) = -1$$

## XX- Application polynôme :

### 1- Définition :

**Poly** = plusieurs ; **nôme** = terme

Une application polynôme à une variable x peut s'écrire sous la forme :  $(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

- x est la **variable**.
- Les réels  $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots$  et  $a_0$  sont les **coefficients**.
- Chaque terme est un **monôme**.

### Exemples :

$$\begin{aligned} A(x) &= 16x^4 - 24x^3 + 40x^2; & B(x) &= 18x^7 + 27x^5 - 36x^3; \\ C(x) &= 5x^2 + 4x - 7 \end{aligned}$$

- **Degré d'un polynôme** : C'est le plus grand exposant de la variable dont le coefficient

n'est pas zéro.

- **Ordonner un polynôme** : Un polynôme peut être ordonné suivant les puissances croissantes de la variable  $x$  ou suivant les puissances décroissantes de la variable  $x$ .

**Exemple** : Soit le polynôme  $f(x) = 2x + 5x^3 - 7 - x^2$  Ce polynôme peut s'écrire :

$$f(x) = 5x^3 - x^2 + 2x - 7 \text{ (puissances décroissantes de } x) \quad f(x) = -7 + 2x - x^2 + 5x^3 \text{ (puissances croissantes de } x)$$

**Activité 1**

**Consigne**: Complète le tableau suivant :

Polynôme	Degré
$f(x) = 2x - 7$	
$f(x) = 5x^3 - 7$	
$f(x) = -x^5$	
$f(x) = -7$	
$f(x) = 0$	

**Consigne :** Soit  $g(x) = 5x^0 - 3x + 9x^2 - x^4$

Ordonne  $g(x)$  suivant les puissances croissantes de  $x$  puis  $g(x)$  suivant les puissances décroissantes de  $x$ .

## 2- VALEUR NUMERIQUE (OU IMAGE) D'UN POLYNOME :

L'écriture  $f(x)$  signifie l'image de  $x$  par  $f$ .

Pour trouver  $f(a)$ , on remplace  $x$  par  $a$  dans l'expression de  $f(x)$ .

**Consigne :** Soit  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

1) Donne le degré de  $f(x)$ .

2) Calcule :  $f(0)$ ,  $f(1)$ ,  $f(5)$ ,  $f(-3)$ ,  $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ,  $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , puis écris les résultats dans le

tableau suivant :

X	0	1	5	-3	$\frac{3}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
f(x)						

## 3- DEVELOPPER, REDUIRE ET ORDONNER UN POLYNOME :

Pour tous nombres réels  $a$ ,  $b$ ,  $m$  et  $k$ , on développe :

- $k(a + b) = ka + kb$
- $k(a - b) = ka - kb$
- $(a + m)(b + k) = ab + ka + mb + mk$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Consigne :** Développe, réduis et ordonne les polynômes suivant les puissances croissantes de  $x$  :  $A(x) = -2x + (3x - 2) - (3 + 7x - 5x^2)$   $B(x) = 8 - 4x(7x - 3) + (7x - 2)(5x + 3)$

$$C(x) = 3(x - 1)(x - 2)(x + 2) - (x - 1)(x^2 + 1)$$

$$D(x) = (2x + 3)^2 - (x - 5)^2 + (4x + 5)(4x - 5)$$

#### 4- OPERATIONS SUR LES POLYNOMES :

Soient les polynômes :

$$A(x) = x^2 + x - 20; \quad B(x) = x^2 - x - 12; \quad f(x) = 2x;$$
$$g(x) = 3x + 1;$$

**Consigne :**

Calcule  $A(x) + B(x)$  ;  $A(x) - B(x)$  ;  $A(x) \times B(x)$ .

Calcule  $f(x) - g(x)$  ;

$$\frac{2}{3} \cdot g(x) + \frac{3}{2} \cdot f(x)$$

#### 5- FACTORISATION DES POLYNOMES :

Factoriser, c'est transformer une somme en un produit. On factorise par :

- a- la mise en facteur d'un facteur commun (apparent ou caché)
- b- l'utilisation des produits remarquables.

**Consigne :** Factorise les polynômes suivants

$$A(x) = 16x^3 - 24x^2 + 40x; \quad B(x) = 18x^5 + 27x^3 - 36x^2.$$

**Consigne :** Ecris sous forme de produits de facteurs du 1<sup>er</sup> degré  $f(x) = 2(2x - 5)(4 - 2x) + (3 + 5x)(2x - 5)$

$$g(x) = (2x - 1)(3x - 2) - (2x - 1)(4x - 1)$$

$$h(x) = 2(7 - 3x)(4 + x) - 5(3 - 2x)(4 + x) + (4 + x)$$

**Consigne:** Factorise

$$(x) = (2x - 1)(3x - 2) + (1 - 2x)(4x - 1)$$

$$(x) = (4x - 6)(x + 2) - (1 - x)(6x - 9) - 10x + 15$$

$$(x) = (3x - 1)(2x + 1) + (x - \frac{1}{3})(5x + 3)$$

1  
—

**Consigne:** Factorise

$$9x^2 + 30x + 25; \quad x^2 - \frac{1}{9}; \quad 8x^2 - 18$$

$$A(x) = x^2 - 4 - (x - 2)(2x - 7); \quad B(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

## 6- RESOLUTION DE CERTAINES EQUATIONS DE DEGRE SUPERIEUR A 1 :

Un polynôme peut s'écrire sous une forme développée ou sous une forme factorisée. L'une ou l'autre de ces formes peut être utilisé pour résoudre une équation.

On utilise souvent la propriété :

« Un produit de facteurs est nul si l'un au moins des facteurs est nul » **Exemple de**

**résolution** : Résous dans chacun des ensembles suivants  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{Q}$ , et  $\mathbb{R}$  l'équation  $(x - 2)(3x - 1)(2x + 1) = 0$

Les valeurs possibles de  $x$  :  $2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}$   
Dans  $\mathbb{N}$ ,  $S = \{2\}$

Dans  $\mathbb{Z}$ ,  $S = \{2\}$  car  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$  et  $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Dans  $\mathbb{D}$ ,  $S = \{2; \frac{1}{2}\}$  car  $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Dans  $\mathbb{R}$ ,  $S = \{2; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\}$

On donne les polynômes

$$f(x) = (x + 1)(x - 3) \text{ et } g(x) = (x - 3)(3x - 2)$$

**Consigne** : Développe, réduits et ordonne  $f(x)$  et  $g(x)$  suivant les puissances décroissantes de  $x$ .

**Consigne** : résous dans  $\mathbb{R}$  les équations : **a)**  $f(x) = 0$

**c)**  $f(x) = -4$

**b)**  $f(x) = -3$

**d)**  $f(x) = g(x)$

## EXERCICES :

- 1) On considère deux applications polynômes  $g$  et  $h$  telles que :  $f(x) = 2x^2 - 9x + 9$  et  $g(x) = 2x^2 - 7x + 5$ .

Calcule  $f(x) + g(x)$  ;  $f(x) - g(x)$  et  $f(x) \times g(x)$

- 2) On te donne l'application polynôme  $f$  définie par :  $f(x) = (x - 3)(2x + 5) + x^2 - 9$

a) Développe, réduis et ordonne  $f(x)$  suivant les puissances décroissantes de  $x$ .

b) Calcule  $f(-3)$  et  $f(3)$

c) Factorise  $f(x)$ .

d) Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations :  $f(x) = -24$  et  $f(x) = 0$

- 3) On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + ax + b$

a. Détermine les réels  $a$  et  $b$  sachant que  $f(1) = 0$  et  $f(-2) = -15$ .

b. Ecris  $f(x)$  sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré.

c. Résous dans  $\mathbb{N}$  l'équation  $f(x) = 0$ .

- 4) On donne deux applications polynôme  $f$  et  $g$  définies par :

$$f(x) = (2x + 1)^2 - (x - 7)^2 ; \quad g(x) = (x + 8)(2x + 1) + x^2 + 16x + 64.$$

a) Développe, réduis et ordonne  $f(x)$  et  $g(x)$  suivant les puissances croissantes de  $x$ .

b) Factorise  $f(x)$  et  $g(x)$ .

c) Résous les équations :  $f(x) = 0$  et  $f(x) = g(x)$ .

d) Calcule  $(2\sqrt{5}) \overline{\frac{1}{12}}$  sachant que  $2,236 \leq \sqrt{5} < 2,237$ , donne un encadrement de  $\frac{1}{12} (2\sqrt{5})$  puis en déduis l'encadrement d'ordre 1 de  $\frac{1}{12} (2\sqrt{5})$ .

5) Factorise les polynômes suivants :  $A(x) =$

$$16x^4 - 24x^3 + 40x^2;$$

$$B(x) = 18x^7 + 27x^5 - 36x^3;$$

$$C(x) = (3x + 2)^2 - (2x + 3)^2$$

$$D(x) = (9x^2 - 1)(2x + 3) - (4x^2 - 9)(3x + 1)$$

$$E(x) = (x^2 - 4)(3x - 1) - (9x^2 - 1)(x + 2)$$

6) On considère les polynômes suivants :

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 \text{ et } g(x) = \frac{1}{6}(x+1)[(x+1)^2 - 7x - 7].$$

a) Factorise  $g(x)$ .

—

b) Calcule  $(\sqrt{5})$ .

c) Développe  $(\sqrt{5} + 1)^2$  et  $(\sqrt{5} - 1)^2$ . en déduis une expression plus simple de  $A = \sqrt{6} +$

$$2\sqrt{5} \text{ et } B = \sqrt{6} - 2\sqrt{5} \text{ puis vérifie que } (\sqrt{5}) = \frac{A}{B}$$

—

$$\frac{A}{B}$$

7) On considère les 3 fonctions polynômes  $f$ ,  $g$  et  $h$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définies par  $f(x) = (2x - 5)^2 - (x - 3)^2$

$$g(x) = (x + 3)(x - 2) - h(x) \text{ et } h(x) = ax^2 +$$

$$bx + c$$

a) Détermine les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  sachant que  $h(0) = -4$  ;  $h(2) = 0$  et  $h(-2) = -16$  Ecris alors  $h(x)$

b) Développe réduis et ordonne  $f(x)$  et  $g(x)$

c) Ecris  $f(x)$  et  $g(x)$  sous forme de produit de facteurs.

d) Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations  $f(x) = 0$  ;  $g(x) = -2$

8) Soient deux applications  $f$  et  $g$  définies par

a)  $f(x) = 9x^2 - 1 + (-6x + 2)(x + 1) - (2x - 3)(3x - 1)$

b)  $g(x) = (x - 2)^2 - (4x - 8)(x + 2) + x^2 - 4x + 4$

c) Développe, réduis et ordonne  $f(x)$  et  $g(x)$  suivant les puissances décroissantes de  $x$ .

d) Calcule:  $f(x) + g(x)$  ;  $f(x) - g(x)$  ;  $f(x) \times g(x)$ .

e) Factorise  $f(x)$  et  $g(x)$

**f)** Résous dans IR les équations  $(x) = 0$  et  $(x) = (x)$

**9)** On considère l'application polynôme  $f$  et IR vers IR définie par

$$(x) = (3x + 2)^2 - (2x - 5)^2$$

**a)** Développe réduis et ordonne  $(x)$  selon les puissances décroissantes de  $x$ .

**b)** Factorise  $(x)$

**c)** Détermine l'ensemble des réels  $x$  vérifiant  $(x) \geq 5x^2 + 3$

**d)** Calcule  $(\sqrt{2})$

**e)** Sachant que  $1,414 \leq \sqrt{2} < 1,415$  donne un encadrement de  $(\sqrt{2})$  à  $10^{-2}$  près.

**10)** Soient  $f$  et  $g$  deux applications telles que :  $f(x) =$

$$x^2 + x - 6 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 3x + 2$$

**a)** Calcule  $f(x) + g(x)$  ;  $f(x) - g(x)$  ;  $f(x) \times g(x)$ .

**b)** Trouve deux applications  $f_1$  et  $g_1$  telles que :  $f(x) =$

$$f_1(x) + x - 2$$

$$g(x) = g_1(x) + x - 2$$

**c)** En déduis les éléments des ensembles suivants :  $F = \{x/x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$ ;  $G = \{x/x \in \mathbb{R}, g(x) = 0\}$   $E = \{x/x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0\}$

**11)** On donne les polynômes  $(x) = 36x^2 - 49 - 3(x - 1)(6x - 7)$

$$B = (3 - 2x)(x + 7) + (9 + 12x + 4x^2)$$

**a)** Développe, réduis et ordonne  $A(x)$  et  $B(x)$ .

**b)** Factorise  $A(x)$  et  $B(x)$ .

**c)** Vérifie les résultats précédentes en calculant à chaque fois  $A(x)$  et  $B(x)$  pour  $x = 1$  et  $x = -1$ .

**d)** Soit  $C(x) = A(x) - B(x)$ . Développe  $C(x)$  et factorise  $C(x)$ .

## XXI- Fonction « Fraction rationnelle » :

1. **Définition** : Soient f et g deux fonctions polynômes avec g non

nulle. La fonction numérique  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  est appelée une fonction

ou fraction rationnelle.

2. **Ensemble de définitions** :

On appelle ensemble de définition (ou domaine de définition) d'une fonction rationnelle q, l'ensemble des valeurs pour lesquelles le calcul est possible. Ce sont des valeurs pour lesquelles le dénominateur est différent de zéro. On note  $D_q$  l'ensemble de définition de q.

**Exemple** :

$$\square \quad h(x) = \frac{x+2}{x^2+1} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0 \quad \mathcal{D}_h = \mathbb{R}$$

$$\square \quad r(x) = \frac{1}{x} \quad \mathcal{D}_r = \mathbb{R} - \{0\} \text{ ou } \mathcal{D}_r = \mathbb{R}^*$$

$$\square \quad q(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$$

$x + 1 \neq 0$   
et  $x - 1 \neq 0$   
 $\Leftrightarrow x \neq -1 \text{ et } x \neq 1$

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \neq 0 \text{ si } \{$$
$$\mathcal{D}_q = \mathbb{R} - \{-1 ; 1\}$$

**Consigne** :

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)} ; R(x) = \frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5} ; (x) = \frac{x+1}{x+3}$$

#### 4- SIMPLIFICATION D'UNE FRACTION RATIONNELLE :

Avant toute simplification, il faut donner l'ensemble de définition d'une fonction rationnelle.

On simplifie une fonction dans son domaine de définition.

**Exemple :** Soit à simplifier  $(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)}$

$$\mathcal{D}_H = \mathbb{R} - \left\{ \frac{8}{5}; 4 \right\}$$

$(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)}$ , on simplifie par  $(5x - 8)$  en écrivant :

Pour tout  $x \in \mathcal{D}_H$  :  $(x) = \frac{x+1}{x-4}$

**Remarque :**

Les fonctions  $(x) = \frac{(x+1)(5x-8)}{(5x-8)(x-4)}$  et  $H'(x) = \frac{x+1}{x-4}$

$(\mathcal{D}_{H'} = \mathbb{R} - \{4\})$ , n'ont pas même ensemble de définition mais dans

$$\mathcal{D}_H \cap \mathcal{D}_{H'} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{8}{5}; 4 \right\}, H(x) = H'(x)$$

**Consigne :** On donne les polynômes  $f(x) = (3x + 2)^2 - (2x + 3)^2$  et  $g(x) = x^2 - 2x + 1$ .

Simplifie les fonctions rationnelles :

$$h(x) = \frac{9x^2 - 16}{9x^2 - 24x + 16}; q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

#### 5- RESOLUTION D'EQUATIONS $f(x)$ et $g(x)$

étant deux polynômes.

Pour résoudre les équations du type  $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ;  $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ ;

$\frac{f(x)}{g(x)} = a$  et  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ , il est préférable d'utiliser la forme simplifiée de  $\frac{f(x)}{g(x)}$

**Consigne :** Soit  $q(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}$

Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations  $q(x) = 0$  ;  $q(x) = 1$  ;  $q(x) =$

$\frac{3}{2}$

**Exemple :**

$$\mathcal{D}q = \mathbb{R} - \{1\}.$$

$$q(x) = \frac{5(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}$$

Pour tout  $x \in \mathcal{D}q$  :  $q(x) = \frac{5x+5}{x-1}$

$(x) = 0$  équivaut à  $\frac{5x+5}{x-1} = 0$  équivaut à  $5x+5 = 0$

alors  $x = -1 \in \mathcal{D}q$  donc  $S = \{-1\}$

$(x) = 1$  équivaut à  $\frac{5x+5}{x-1} = 1$  équivaut à  $5x+5 = x-1$  alors

$$x = -\frac{3}{2} \in \mathcal{D}q$$

donc  $S = \{-\frac{3}{2}\}$

$Q(x) = \frac{3}{2}$  équivaut à  $\frac{5x+5}{x-1} = \frac{3}{2}$  alors  $2(5x+5) = 3(x-1)$

équivaut à  $10x+10 = 3x-3$  alors  $x = -\frac{13}{7} \in \mathcal{D}q$  donc  $S = \{-\frac{13}{7}\}$

## EXERCICES :

- 1) Détermine l'ensemble de définition puis simplifie les fonctions rationnelles suivantes :

$$f(x) = \frac{(2x - 3)(16x^2 - 4)}{(4x + 2)(4x^2 - 1)}; \quad g(x) = \frac{(6x + 8x^2)(2x + 3)}{2(4x^3 + 12x^2 + 9x)};$$

$$h(x) = \frac{4x - x^3}{4x + 2x^2}; \quad r(x) = \frac{-9 - 12x - 4x^2}{2x + 3};$$

$$q(x) = \frac{4x^2 - (3x - 1)(2x + 5)}{4x^2 + 20x + 25};$$

$$t(x) = \frac{(2x - 3)(x - 4) + (4x^2 - 9) - (2x - 3)^2}{x^2 + 4x + 4}$$

- 2) On considère la fonction rationnelle  $g$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $(5x - 7)(x +$

$$g(x) = \frac{3}{(3x - 5)(7 - 5x)}$$

- a) Détermine l'ensemble de définition  $E$  de  $g$   
b) Dans  $E$  simplifie  $g(x)$   
c) Calcule  $(\sqrt{3})^{\overline{-}}$  en donner une écriture ne comportant pas le radical au dénominateur  
d) Résoudre dans  $E$  l'équation

$$\frac{x + 3}{5 - 3x} = \frac{1}{3}$$

- 3) Soit l'application dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

- a) Factorise  $f(x)$ .  
b) Résous dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $f(x) = 0$ .  
c) Soit  $g$  l'application dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $g(x) = ax^2 + bx + 1$ . Calcule les réels  $a$  et  $b$  sachant que  $g(1) = 0$  et  $g(2) = 1$ .  
d) Soit  $h$  la fonction dans  $\mathbb{R}$  définie par :

$$h(x) = \frac{f(x)}{x+1} - \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-2)}$$

1. Détermine l'ensemble de définition D de cette fonction.
2. Démontre que pour tout x élément de D on a :

$$h(x) = \frac{3 - 2x}{x - 2}$$

4) On donne  $A(x) = 2x^2 + 2x - 4$  et  $B(x) = (x - 1)^2 + x^2 - 3x + 2$ .

a) Développe, réduis et ordonne le produit :  $2(x - 1)(x + 2)$ .

b) Factorise  $A(x)$ .

c) Développe, réduis et ordonne le produit :  $(x - 1)(x - 2)$ .

d) Factorise  $B(x)$ .

e) On considère maintenant l'expression :  $C(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$

- Simplifie  $C(x)$  en précisant pour quelles valeurs de  $x$  la simplification est légitime ?
- Calcule  $C(x)$  pour les valeurs suivantes de  $x$  : 0 ; 1 ; -2 ; -1.

5) On considère les deux fonctions polynômes  $f$  et  $g$  définies dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (3x + 1)^2(3x - 1)^2 - 4(3x + 1)^2$$

$$g(x) = 9(3x + 2)(2x - 5)(x + 1) + 3(2x - 5)(x + 1)$$

a) Ecris  $f(x)$  et  $g(x)$  sous forme de produit de facteurs du 1<sup>er</sup> degré.

b) Résous dans  $\mathbb{R}$  les équations :  $f(x) = 0$  puis  $g(x) = 0$ .

c) Soit la fonction rationnelle  $q$  définie par :  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Détermine l'ensemble de définition de  $q$  puis simplifie  $q(x)$ .